LEZIONI

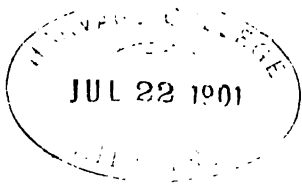
SULLA TEORIA DELLE SUPERFICIE

DEL DOTTOR

GREGORIO RICCI

PROFESSORE ORDINARIO

nella R. Università di Padova

FRATELLI DRUCKER - EDITORI
VERONA - PADOVA
1898
REALE STAB. P. PROSPERINI — PADOVA

PREFAZIONE

Nelle questioni di Analisi, che per loro natura non sono collegate colla scelta delle variabili indipendenti, io mi valgo da molto tempo di uno strumento, che chiamo *Calcolo Differenziale assoluto*, il quale conduce a formule ed equazioni, che si presentano sempre sotto la identica forma per qualunque sistema di variabili. — Eliminati da tali questioni gli elementi ad esse estranei rappresentati dalle variabili indipendenti, quando queste non siano lasciate affatto arbitrarie, i metodi di ricerca assumono una notevole uniformità e spontaneità ed i risultati una simmetria tutta loro propria, mentre, grazie anche ad un opportuno sistema di notazioni, la stessa generalità va a vantaggio, anzi che a scapito, della semplicità ed evidenza delle formole e della rapidità delle deduzioni. E ciò è naturale, dacchè, se le vie indirette e gli spedienti faticosamente pensati volta per volta fanno fede dell' acume di chi li additò, dànno in pari tempo a vedere che la scienza non ha ancora trovata la via maestra, che conduce alla meta; la quale via, una volta scoperta, risulta sempre facile e piana ed apre alla vista nuovi e più larghi orizzonti.

Le applicazioni geometriche del Calcolo Differenziale hanno recentemente assunto un tale sviluppo da costituire da sole un vastissimo dominio scientifico; ma la varietà dei metodi e la moltiplicità degli spedienti e dei soccorsi esterni, a cui i geometri ricorrono nel trattare le diverse questioni ad esso pertinenti, non permettono di riguardarlo come definitivamente ordinato e separato dai limitrofi con ben determinati confini. — Nelle belle *Lezioni di Geometria Differenziale del* PROF. BIANCHI, come già negli scritti del WEINGARTEN, del KNOBLAUCH e di altri geometri tedeschi, le proprietà delle superficie vengono opportunatamente raggruppate intorno alle note due forme fondamentali, e le notazioni del Calcolo Differenziale assoluto sono quà e là introdotte con vantaggio; ma, mentre ciò dimostra esistere un intimo nesso

tra queste e le ricerche, cui si riferiscono, un tale nesso non è posto sufficientemente in luce perchè lo strumento analitico, da cui naturalmente ha rilievo, viene lasciato in disparte. — Perciò i teoremi non si presentano nel loro ordine naturale, ma in modo che riesce difficile rendersi conto della loro genesi e delle essenziali reciproche dipendenze. — La stessa opera classica del DARBOUX, mentre è oramai guida indispensabile a chi voglia provarsi in questi studï, per la moltiplicità delle cognizioni, che essa presuppone in campi non strettamente affini a quelli della Analisi e della Geometria, e per le digressioni, a cui l'Autore è di frequente costretto, sembra mettere in maggiore evidenza la opportunità che la *Geometria infinitesimale* costituita in unità organica proceda oramai per vie sue proprie. Questo bisogno fu pure sentito dal PROFESSOR CESARO, che nelle sue *Lezioni di Geometria intrinseca* di recente pubblicazione raggiunse con tanta semplicità di mezzi il fine propostosi *di raccogliere e coordinare le formole fondamentali per l' Analisi intrinseca degli enti geometrici.... e di stabilire e proporre una segnatura uniforme ed espressiva, che permetta di svolgere i calcoli con elegante agilità.* — Però, se non mi inganno, i metodi quì seguiti, oltre che si possono estendere a rami svariatissimi della Analisi pura ed applicata, in questo stesso della Geometria Differenziale appaiono più fecondi; e in ogni modo il programma da me svolto è molto diverso da quello, che l' egregio collega dell' Università di Napoli si propose.

Ho adottato il titolo, che si legge in capo a questo libro, malgrado che esso possa procurarmi la taccia di presunzione per la sua identicità con qnello delle classiche *Lezioni* del DARBOUX, perchè era il solo che corrispondesse esattamente al suo contenuto. Se il tempo e l' accoglienza riservata a questo me lo consentiranno, io potrò svolgere in altro volume la *Teoria dello spazio euclideo a tre dimensioni*, nella quale troverà naturalmeute posto lo studio dei sistemi di linee e di superficie in esso tracciate; e la estensione della teoria stessa agli iperspazï, della quale ho già esposti in un recente lavoro i risultati fondamentali (1). — Io pubblico ora con pochi ulteriori sviluppi ed aggiunte le *Lezioni*, da me tenute per due anni nella Università di Padova, nelle quali ho svolta soltanto la teoria delle superficie considerate in sè stesse e dei sistemi di linee sopra di esse tracciate. — E neppure ho la pretesa di avere esaurito questo tema per sè solo

(1) *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* — Reale Accademia, dei Lincei; Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali; Serie, 5,ª Vol, II.°

vastissimo; ma spero il Lettore sia per riconoscere che con altri metodi non sarebbe stato possibile condensare in così piccola mole la trattazione di tanti e così varî argomenti; tra cui, per esempio, quello delle superficie di 2°. grado che, per quanto so, viene per la prima volta trattato *ex-professo*.

L' abitudine ai concetti della *Geometria Analitica* fa sì che un qualunque ente geometrico non si consideri come noto, finchè non se ne conoscano le equazioni in termini finiti; ma questo modo di rappresentazione non è nè il solo, nè il più opportuno, quando si tratti di studiare l' ente geometrico in sè stesso senza porlo in relazione con altri. — Se per esso l' ente rappresentato risulta ben definito, data la sua rappresentazione analitica, di queste in vece per uno stesso ente ve ne ha un numero infinito, che si equivalgono perfettamente; ed anche in questo caso la indeterminatezza è a danno della eleganza e della concisione. — Se però col sussidio del *Calcolo Differenziale* si eliminano le costanti o le funzioni arbitrarie, che rappresentano questa indeterminazione, si ottengono delle nuove rappresentazioni, tali, che vi ha corrispondenza univoca tra esse e gli enti geometrici rappresentati — Per esempio se si tratta di un sistema semplicemente infinito (*congruenza*) di linee tracciate sopra una superficie, alla equazione in termini finiti, che contiene una funzione arbitraria, si sostituisce opportunamente la equazione a derivate parziali, di cui quella funzione rappresenta l' integrale generale. — Questi metodi di rappresentazione non sono certamente nuovi nella Geometria infinitesimale, dacchè sono stati quà e là applicati con successo; ma, come si vedrà, essi sono intimamente connessi coi metodi di *Calcolo Differenziale assoluto*, pei quali assumono una importanza predominante. — Per questa ragione essi vengono continuamente preferiti in queste Lezioni.

La Introduzione contiene una esposizione, che ho cercato di rendere il più possibile semplice e piana, dei metodi di calcolo più volte ricordati ed un breve studio sulle quadriche differenziali in generale ed in particolare sulle binarie. — La novità e generalità dei metodi stessi e delle notazioni esigeranno forse dal Lettore qualche sforzo per acquistare con essi una tale famigliarità, che gli permetta poi di servirsene correntemente; ma, superate queste difficoltà più di forma che di sostanza, la via alle applicazioni geometriche gli si aprirà poi davanti facile e piana. Quanto alla scelta, alla ripartizione ed all' ordine, secondo il quale i diversi argomenti sono stati distribuiti, il Lettore potrà farsene un concetto adeguato dall' indice sommario, che segue. Mi basterà quì

il rilevare la assoluta separazione raggiunta tra le due Parti essenzialmente distinte della teoria delle superficie, secondo che queste si riguardano come veli flessibili ed inestendibili, ovvero come dotate di forma rigida determinata; alle quali corrispondono le due *Parti*, in cui le lezioni sono state divise: e che in alcuni capitoli della *Seconda parte* ho preso norma dalle ricordate *Lezioni* del Bianchi, sostituendo soltanto le sue dimostrazioni con altre più conformi ai concetti generali, che dominano in questo libro.

INDICE DELLE MATERIE

INTRODUZIONE

CAPITOLO SESTO

CAPITOLO SETTIMO

PARTE SECONDA

Teoria delle superficie considerate come dotate di forma rigida nello spazio.

CAPITOLO PRIMO

CAPITOLO SECONDO

Introduzione

Capitolo Primo

Delle equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1° ordine; e dei sistemi completi.

1. Si abbia un sistema di equazioni a derivate ordinarie simultanee

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots\dots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad \alpha)$$

Come è noto dal Calcolo Integrale, il sistema integrale generale di un tale sistema di equazioni definisce $n-1$ qualunque delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ in funzione dell'altra e di $n-1$ costanti arbitrarie in guisa che per un valore arbitrario della variabile indipendente le $n-1$ funzioni assumono valori affatto arbitrarî. Ciò è quanto dire che ad ogni sistema arbitrario di valori attribuiti alle variabili x_i,

$x_2, \ldots x_n$ corrisponde un sistema di valori finiti per le costanti arbitrarie; in altri termini che il sistema integrale generale del sistema (α) può assumersi sotto la forma

$$u_i(x_1\, x_2 \ldots x_n) = c_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1) , \qquad 1)$$

$u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ essendo certe funzioni a un sol valore delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$; e $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ rappresentando delle costanti arbitrarie.

Dalle (1) si traggono le

$$\sum_1^n{}_r \frac{du_i}{dx_r}\, dx_r = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1), \qquad 2)$$

le quali, per le (α), equivalgono alle

$$\sum_1^n{}_r X_r \frac{du_i}{dx_r} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1) \qquad 3)$$

Si osservi che, per le (1), dalla arbitrarietà delle $c_1, c_2 \ldots c_{n-1}$ risulta che le funzioni $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ sono indipendenti fra di loro, e si concluderà che

"Se un sistema di equazioni simultanee della forma

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

„ammette il sistema

$$u_i(x_1\, x_2 \ldots x_n) = c_i ,$$

„come sistema integrale generale, le funzio=

„ni $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ rappresentano $n-1$ integrali indi-
„pendenti della equazione a derivate parziali
„di 1° ordine

$$\sum_{1}^{n} {}_r X_r \frac{du}{dx_r} = 0 \text{ . "} \qquad \text{I}$$

Vale pure il teorema inverso poichè, se $u_1 u_2 \dots u_{n-1}$ sono $n-1$ integrali indipendenti della equazione (I), varranno le (3); di più, facendo le posizioni (1) (in cui $c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ rappresentino delle costanti arbitrarie) ne seguiranno le (2). Dal confronto poi di queste colle (3) seguono le (α), poichè, $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ essendo indipendenti fra di loro, la matrice del sistema di equazioni algebriche

$$\sum_r \frac{du_i}{dx_r} y_r = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots n-1)$$

non è identicamente nulla.

Risulta dunque dimostrato che una equazione della forma (I) ammette $n-1$ integrali indipendenti. Si supponga che la stessa equazione sia soddisfatta da n valori $u_1, u_2 \dots u_{n-1} u_n$ di u. Alle (3) sarà da aggiungere la identità, che se ne ottiene per $i = n$, e da tutte queste identità scenderà la

$$\frac{d(u_1 u_2 \dots u_n)}{d(x_1 x_2 \dots x_n)} = 0 \, .$$

Le funzioni $u_1, u_2, .. u_n$ non sono dunque indipendenti fra di loro ed una di esse, per esempio u_n, è funzione delle altre $u_1, u_2, .. u_{n-1}$.
D'altra parte, se $u_1, u_2, .. u_{n-1}$ sono integrali della equazione (I), e φ è il simbolo di una funzione arbitraria, anche $\varphi(u_1\, u_2 .. u_{n-1})$ è integrale della equazione stessa, e ciò risulta sia dalla effettiva sostituzione di φ nel primo membro della (I), sia osservando che, se il sistema integrale generale delle (α) è rappresentato dalle equazioni (1), si può sempre concepire un altro sistema integrale generale, di cui faccia parte la equazione

$$\varphi(u_1\; u_2 \dots u_{n-1}) = c,$$

c essendo una costante arbitraria.

Le equazioni della forma (1), cioè le equazioni a derivate parziali di 1° ordine lineari ed omogenee rispetto a queste, sono tutte soddisfatte, se alla funzione incognita si attribuisce un qualunque valore costante. Però di queste soluzioni non si tien conto, quando si parla degli integrali di una di tali equazioni, e quindi, per quanto è stato dimostrato, si può asserire che

« Una equazione lineare ed omogenea

„a derivate parziali di 1° ordine ad n variabi-
„li indipendenti ammette $n-1$ e non più inte-
„grali indipendenti fra di loro. Ogni altro suo
„integrale è dato da una funzione arbitraria
„di $n-1$ integrali indipendenti e del resto qua-
„lunque della equazione stessa."

Se $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ sono integrali indipenden-
ti di una equazione a derivate parziali di 1°
ordine lineare ed omogenea ad n variabili
indipendenti, si dice che essi costituiscono un
sistema fondamentale di integrali per la equazione
stessa. Una funzione arbitraria di $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}$
prende il nome di integrale generale. In fine si
dicono integrali particolari quelli, che si otten-
gono determinando la funzione arbitraria
in un modo qualunque. Per esempio sono
integrali particolari quegli stessi integrali,
che costituiscono un sistema fondamentale.

Dato un sistema fondamentale $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$,
ogni altro sistema fondamentale si avrà
scegliendo $n-1$ funzioni qualunque $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$
di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ colla sola restrizione che il de-
terminante iacobiano $\dfrac{d(v_1 v_2 \ldots v_{n-1})}{d(u_1 u_2 \ldots u_{n-1})}$ sia diverso
da 0.

Osserviamo ancora che, se $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ sono $n-1$

funzioni indipendenti delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, esiste sempre una ed una sola equazione (I), per cui $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali. Infatti, se si riguardano nelle (3) le X, come incognite, e si osserva che per la indipendenza delle $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ i minori di ordine $n-1$ della matrice del sistema (3) non possono essere tutti nulli, se ne conclude che questo sistema basta per determinare i rapporti delle X_r e quindi la equazione (I).

2. Supponiamo $n = 3$ e consideriamo x_1, x_2, x_3 come coordinate cartesiane ortogonali dello spazio. Le equazioni (α) possono riguardarsi come le equazioni differenziali di un sistema di linee, di cui le (1) sono le equazioni in termini finiti. Il numero delle linee del sistema è ∞^2 e poichè, per quanto abbiamo detto, le funzioni u_1 ed u_2 sono ad un sol valore, ne segue che questo sistema è tale che per ogni punto dello spazio passa una ed una sola linea del sistema. Ciò si esprime dicendo che il sistema costituisce una congruenza di linee.

Qualunque sia il numero n è utile consi-

derare $x_1, x_2, .. x_n$ come coordinate cartesiane ortogonali di uno spazio piano S_n ad n dimensioni, poichè ciò permette di estendere al caso generale, le considerazioni fatte sopra pel caso di $n = 3$. In generale si può allora dire che le equazioni (α) rappresentano un sistema di linee, il cui numero è ∞^{n-1} e tale che per ogni punto dello spazio considerato passa una ad una sola linea del sistema; cioè una congruenza di linee nello spazio S_n. Se $v_1, v_2, \ldots v_{n-1}$ sono funzioni indipendenti di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, la congruenza dello spazio S_n rappresentata dalle equazioni (4) lo è pure dal sistema equivalente

$$v_i\ (x_1\ x_2 \ldots x_n) = c'_i\ .$$

Si può anche evidentemente dire che la stessa congruenza è rappresentata o dal sistema di equazioni differenziali (α) o dalla equazione a derivate parziali (I), per cui tanto $u_1, u_2, .. u_{n-1}$ quanto $v_1\ v_2 \ldots v_{n-1}$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali. Questo modo di rappresentare analiticamente le congruenze di linee in uno spazio S_n ha sulla rappresentazione mediante equazioni in termini finiti il vantaggio che, come segue da una osservazione fat-

ta in fine del § 1, essa è tale, che vi ha corrispondenza univoca tra la rappresentazione analitica e l'ente geometrico rappresentato; cioè tale che ad ogni congruenza di linee nello spazio S_n corrisponde una ed una sola equazione a derivate parziali (o, se si vuole, un solo sistema di equazioni differenziali della forma (α)) e reciprocamente ad ogni equazione (I) corrisponde una sola congruenza nello spazio S_n. — A questo pregio logico corrispondono, come si vedrà a suo tempo, notevoli vantaggi analitici.

Le linee della congruenza rappresentate dalla equazione (I) si dicono caratteristiche della equazione stessa. Ciascuna di esse si trova sopra una superficie del sistema $u_1 = c_1$ o, in generale, indicando con f una funzione arbitraria di $u_1, u_2, .. u_{n-1}$ sopra una superficie del sistema

$$f(u_1\ u_2\ \dots u_{n-1}) = c\ .$$

Una tale superficie può anzi considerarsi generata dalle linee della congruenza e ne contiene un numero ∞^{n-2}; e perciò si chiama superficie della congruenza.

3. È facile dimostrare che, noto un integrale particolare u_{n-1} di una equazione della for-

ma (I), la integrazione della equazione stessa, cioè la determinazione di un sistema fondamentale di integrale, dipende dalla integrazione di una equazione a derivate parziali di 1° ordine lineare ed omogeneo con $n-1$ variabili indipendenti soltanto. Infatti la u_{n-1} dipenderà da una almeno delle variabili indipendenti e potrà essa stessa essere assunta come variabile indipendente x_n. – Basterà allora integrare la equazione

$$X_1 \frac{du}{dx_1} + X_2 \frac{du}{dx_2} + \dots + X_{n-1} \frac{du}{dx_{n-1}} = 0,$$

considerando nelle $X_1, X_2, \dots X_n$ la x_n come un parametro; dacchè, se $u_1, u_2, \dots u_{n-2}$ è un sistema fondamentale di integrali per questa equazione, tra essi non potrà aver luogo alcuna relazione della forma

$$\varphi\,(u_1\, u_2\,,\; u_{n-2}\; x_n) = 0,$$

e quindi $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ assieme ad x_n ci daranno un sistema fondamentale per la equazione proposta.

4\. Si considerino ora insieme più equazioni della forma (I), cioè un sistema di m equazione della forma

$$\Phi_i\,(u) = \sum_r^n X_{r,i} \frac{du}{dr_r} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots m) \quad \text{II})$$

Diremo che queste equazioni sono indipendenti

fra di loro, se sono tali considerate come equazioni algebriche lineari ed omogenee nelle n incognite $\frac{du}{dx_r}$. Diremo poi che un altro sistema della stessa forma è equivalente al sistema (II), se i due sistemi si equivalgono nel senso algebrico, considerandoli amendue come sistemi algebrici nel modo detto sopra. È chiaro che ogni integrale, che soddisfi alle (II) soddisfa pure ad ogni equazione della forma

$$\sum_i \lambda_i \, \Phi_i(u) = 0,$$

sempre che i coefficienti λ_i siano indipendenti dalla funzione incognita: dal che segue che esso soddisfa anche ad ogni sistema equivalente al sistema (II).

Supponiamo che le (II) siano indipendenti fra di loro ed $m = n$. Il sistema (II) equivale allora al sistema

$$\frac{du}{dx_r} = 0,$$

che non ammette nessun integrale, poichè non consideriamo come tali i valori costanti della funzione.

Supponiamo dunque $m < n$ e cerchiamo se e quanti integrali indipendenti ammetta il sistema (II). Notiamo che si ha

$$\Phi_i \left\{ \Phi_j(u) \right\} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} X_{r,i} X_{s,j} \frac{d^2 u}{dx_r \, dx_s} + \sum_{1}^{n}{}_{rs} X_{s,i} \frac{d X_{r,j}}{dx_s} \frac{du}{dx_r}$$

e quindi ponendo

$$\left. \begin{array}{l} X_{r,ij} = \sum_1^n {}_s \left(X_{s,i} \frac{dX_{r,j}}{dx_s} - X_{s,j} \frac{dX_{r,i}}{dx_s} \right) \\ (r = 1, 2, \ldots n;\ i, j = 1, 2, \ldots m) \end{array} \right\} \quad 5)$$

$$\varphi_i \{ \varphi_j(u) \} - \varphi_j \{ \varphi_i(u) \} = \sum_1^n {}_r X_{r,ij} \frac{du}{dx_r}$$

La equazione

$$\varphi_i \{ \varphi_j(u) \} - \varphi_j \{ \varphi_i(u) \} = 0$$

si dice risultante iacobiana delle due

$$\varphi_i(u) = 0, \; \varphi_j(u) = 0.$$

È chiaro che ogni funzione u, la quale soddisfi al sistema (II), soddisfa alle risultanti iacobiane delle equazioni del sistema stesso combinate due a due cioè alle

$$\left. \begin{array}{l} \sum_1^n {}_r X_{r,ij} \frac{du}{dx_r} = 0, \\ (i, j = 1, 2, \ldots m) \end{array} \right\} \quad II')$$

le quali saranno da aggiungere alle (II), in quanto non siano identità od algebricamente dipendenti dalle (II) stesse. Se il sistema delle (II) e (II') insieme considerate contiene n equazioni indipendenti, potremo concludere che il sistema (II) non ammette alcun integrale: nel caso opposto converrà procedere sul nuovo sistema, come si è proceduto su quello dato. Così proseguendo è chiaro che, se questo ammette uno o più integrali, si dovrà giungere in fine ad un sistema di equazioni della

forma del sistema (II), il quale contenga un numero $m < n$ di equazioni indipendenti e sia tale che tutte le risultanti iacobiane delle sue equazioni combinate due a due o siano identità, o dipendano algebricamente dalle equazioni del sistema stesso. Questi sistemi, a cui potremo limitare d'ora in avanti le nostre considerazioni, si dicono completi, e prendono il nome speciale di iacobiani quando le risultanti iacobiane delle equazioni, che li costituiscono, sono tutte identicamente nulle.

Perchè il sistema (II) sia completo è dunque necessario e sufficiente che le $X_{r,ij}$ si esprimano linearmente per le $X_{r,h}$ cioè che si abbiano delle relazioni della forma

$$X_{r,ij} = \sum_{1}^{m}{}_{h} \lambda_{hij} X_{r,h} \qquad 6)$$

$$(r = 1, 2, \ldots n \; ; \; i, j = 1, 2, \ldots m),$$

e perchè sia iacobiano che si abbiano le identità

$$X_{r,ij} \equiv 0 .$$

5. Se le

$$\varphi_i = \sum_{1}^{n}{}_{r} X_{r,i} \frac{d}{dx_r}$$

si riguardano come operazioni da eseguirsi sopra una funzione arbitraria u è facile riconoscere che è

$$\Phi_i(u+v) = \Phi_i(u) + \Phi_i(v),$$

cioè che una tale operazione obbedisce come si dice alla legge distributiva; e di più che è

$$\Phi_i(uv) = u\,\Phi_i(v) + v\,\Phi_i(u).$$

Fondandosi sopra queste osservazioni è poi facile dimostrare che

„Se un sistema di equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1° ordine è completo, ogni sistema ad esso equivalente è pure completo"

Si supponga che le $\underline{m}$ equazioni

$$\Phi_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m) \quad II)$$

tutte indipendenti fra di loro costituiscano un sistema completo. Per definizione ogni sistema ad esso equivalente si avrà ponendo

essendo le $\Psi_k(u) = 0 \quad (k = 1, 2, . m) \quad II')$

$$\Psi_k(u) \equiv \sum_1^m{}_i\, \alpha_{ik}\, \Phi_i(u),$$

sempre che il determinante $(\alpha_{11}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{mm})$ sia diverso da $\underline{o}$. Per le osservazioni fatte sopra avremo

$$\Psi_k\{\Psi_l(u)\} = \sum_1^m{}_{ij}\, \alpha_{ik}\alpha_{jl}\, \Phi_i\{\Phi_j) + \sum_1^m{}_j\, \Phi_j \sum_1{}_i\, \alpha_{ik}\, \Phi_i(\alpha_{jl})$$

e però

$$\Psi_k\{\Psi_l(u)\} - \Psi_l\{\Psi_k(u)\} = \sum_1^m{}_{ij}\, \alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\{\Phi_i(\Phi_j) - \Phi_j(\Phi_i)\}$$

$$+ \sum_1^m{}_j\, \Phi_j \sum_1^m{}_i \{\alpha_{ik}\, \Phi_i(\alpha_{jl}) - \alpha_{il}\, \Phi_i(\alpha_{jk})\}.$$

Poichè il sistema (II) è, per ipotesi completo, le risultanti iacobiane delle sue equazioni si esprimono linearmente per le $\varphi_i(u)$ e però per le formole precedenti, la stessa cosa può asserirsi delle risultanti delle equazioni (II). — Per dimostrare il teorema basta ora osservare di più che, i sistemi (II) e (II') essendo equivalenti, le $\varphi_i(u)$ si esprimono linearmente per le $\psi_l(u)$.

6. Si abbia ancora un sistema (II) di m equazioni indipendenti fra di loro, e sia $n>m$ il numero delle variabili indipendenti. Potremo risolvere il sistema rispetto ad m delle derivate di u e così sostituire ad esso il sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{c}\frac{du}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_s A_{s,i} \frac{du}{dx_s} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots m)\end{array}\right\} \quad S)$$

Pel teorema dimostrato nel paragrafo precedente, se supponiamo completo il sistema (II), lo sarà pure il sistema (S). Confrontando questo col sistema (II) abbiamo $X_{i,i} = 1$, $X_{r,i} = 0$ per $r \gtrless i$ ed $r < m+1$ e però per le (5) $X_{r,ij} = 0$ per $r < m+1$. Dalle (6) risultano quindi le

$$\lambda_{hij} = 0$$

e quindi le

$$X_{r,ij} = 0,$$

qualunque sia r. Concludiamo che

„ Ad un sistema completo di m equazio-
„ ni a derivate parziali di 1° ordine lineari
„ ed omogenee con n variabili indipendenti, se
„ è $m < n$, si può sostituire un equivalente si-
„ stema iacobiano risolvendolo rispetto ad m
„ derivate della funzione incognita ".

7. Il teorema del § precedente ci permette di li-
mitare lo studio dei sistemi di equazioni, dei
quali ci occupiamo, per ciò, che riguarda la lo-
ro integrazione al caso dei sistemi iacobiani.
Supponiamo dunque che, essendo sempre $m < n$,
il sistema (II) sia iacobiano; e che $u_1, u_2, .. u_{n-1}$
sia un sistema fondamentale di integrali per la
equazione

$$\Phi_1 (u) = 0$$

Gli integrali del sistema dovranno essere fun-
zioni di $u_1, u_2, .. u_{n-1}$ soltanto e però dovranno
soddisfare al sistema di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{1}^{n-1} {}_r\, Y_{r,i} \dfrac{du}{du_r} = 0, \\ (i = 2, 3, 4, \ldots m) \end{array}\right\}, \quad II_1)$$

posto

$$Y_{ri} = \sum_{1}^{n} {}_s\, X_{s,i} \frac{du_r}{dx_s} \qquad 7)$$

$$(r = 1, 2, .. n-1 ; \; i = 2, 3, .. m).$$

Avendosi identicamente

$$\sum_{1}^{n}{}_{s} X_{s,1} \frac{du_r}{dx_s} = 0 ,$$

e quindi

$$\sum_{1}^{n}{}_{s} X_{s,1} \frac{d^2u_r}{dx_s dx_t} = -\sum_{s} \frac{dX_{s,1}}{dx_t} \frac{du_r}{dx_s} ,$$

dalle (7) si traggono le

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} X_{r,1} \frac{dy_{r,i}}{dx_r} = \sum_{st} \left(X_{t,1} \frac{dX_{s,i}}{dx_t} - X_{t,i} \frac{dX_{s,1}}{dx_t} \right) \frac{du_r}{dx_s} ,$$

cioè poichè il sistema (II) è iacobiano, le

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} X_{r,1} \frac{dy_{hi}}{dx_r} \equiv 0 .$$

Le $y_{r,i}$ sono dunque funzioni di $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ soltanto, poichè soddisfanno alla equazione $\varphi_1(u) = 0$; e però tali sono pure gli integrali, se esistono, del sistema (II_1), che sono per ciò tutti e soli gli integrali del sistema (II). Così si fa dipendere la integrazione del sistema (II) da quella del sistema (II_1) della stessa natura, ma che contiene una equazione ed una variabile di meno. Dimostreremo che anche il sistema (II_1) è iacobiano e potremo quindi far dipendere la sua integrazione da quella di un sistema analogo con $m-2$ equazione ed $n-2$ variabili. Così proseguendo, concluderemo infine che gli integrali del sistema proposto sono tutti e soltanto gli integrali di una equa-

zione a derivate parziali di 1° ordine lineare ed omogenea e ad $n-m+1$ variabili indipendenti e sono quindi in numero di $n-m$. (§ 1).

Se si riguardano come variabili indipendenti $u_1, u_2, \dots u_{n-1}\, x_n$ invece di $x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, x_n$ si hanno le identità

$$\sum_1^{n-1}{}_t \frac{dx_r}{du_t}\frac{du_t}{dx_p} = \frac{dx_r}{dx_p}$$

$$\sum_1^{n-1}{}_t \frac{dx_r}{du_t}\frac{du_t}{dx_n} + \frac{\partial x_r}{\partial x_n} = \frac{dx_r}{dx_n}$$

$$(r,\ p = 1, 2, \dots n-1)$$

e però ricordando le (7),

$$\sum_1^{n-1}{}_t\, y_{t,i}\frac{dx_r}{du_t} = \sum_1^{n}{}_p X_{p,i}\frac{dx_r}{dx_p} - X_{n,i}\frac{\partial x_r}{\partial x_n} = X_{r,i} - X_{n,i}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}\ .$$

Da queste, ricordando ancora che le y_{rj} sono funzioni soltanto di $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$ si traggono le

$$\sum_1^{n-1}{}_t\, y_{t,i}\frac{dy_{r,j}}{du_t} = \sum_1^{n-1}{}_t X_{t,i}\frac{dy_{r,j}}{dx_t}$$

ovvero, sostituendo nei secondi membri alle y_{rj} le loro espressioni date dalle (7),

$$\sum_1^{n-1}{}_t\, y_{t,i}\frac{dy_{r,j}}{du_t} = \sum_{st} X_{t,i}\, X_{s,j}\frac{d^2u_r}{dx_s\,dx_t} + \sum_{st} X_{t,i}\frac{dX_{s,j}}{dx_t}\frac{du_r}{dx_s}$$

Ricordando che il sistema (II) si suppone iacobiano, da queste si traggono le

$$\sum_t\left(y_{t,i}\frac{dy_{s,i}}{du_t} - y_{t,j}\frac{dy_{s,i}}{du_t}\right) \equiv 0\,,$$

le quali ci dicono che lo è pure il sistema (II_1).

Come per una sola equazione, così per un sistema completo di m equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1° ordine con n variabili indipendenti, supposto $m < n$, $n-m$ integrali indipendenti costituiscono un sistema fondamentale di integrali; una loro funzione arbitraria si chiama integrale generale del sistema; ed integrale particolare ogni determinata funzione degli stessi integrali.

8. Il teorema del § precedente contiene anche un metodo per la effettiva integrazione dei sistemi completi. Sostituito nel modo ivi indicato o in un altro modo qualunque, al sistema proposto un equivalente sistema iacobiano, e supposto che il sistema risulti di m equazioni ad n variabili indipendenti, quel metodo esige la integrazione successiva di m equazioni a derivate parziali di 1° ordine lineari ed omogenee, di cui la prima è ad n, la seconda ad $n-1$, etc. l'ultima ad $n-m+1$ variabili. A questo però è da preferire il seguente metodo dovuto al Mayer, il quale richiede la integrazione di una sola equazione ad $n-m+1$ variabili.

Si supponga il sistema proposto sostituito

come nel § precedente dall'equivalente sistema (S), il quale, come abbiamo visto, risulterà iacobiano; e questo si trasformi sostituendo alle m variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_m$ m nuove variabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ legate a quelle da relazioni della forma

$$x_i = c_i + (\alpha_1 - \alpha_0)\, f_i(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \qquad T)$$
$$(i = 1, 2, \ldots m),$$

$c_1, c_2, \ldots c_m$ ed α_0 essendo costanti qualunque. Avremo

$$\frac{du}{d\alpha_h} = \sum_1^m{}_i \frac{du}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha_h}$$

e per $h > 1$

$$\frac{du}{d\alpha_h} = (\alpha_1 - \alpha_0) \sum_1^m{}_i \frac{df_i}{d\alpha_h}\frac{du}{dx}.$$

Il sistema proposto (S) assumerà quindi la forma

$$\frac{du}{d\alpha_1} + \sum_{m+1}^{}{}_r C_r \frac{du}{dx_r} = 0 \qquad I)$$

$$\frac{du}{d\alpha_h} + \sum_{m+1}^{m}{}_r C_{r,h} \frac{du}{dx_r} = 0 \qquad S_1)$$
$$(h = 2, 3, \ldots m)$$

essendo

$$C_{r,h} = (\alpha_1 - \alpha_0) \sum_1^n{}_i A_{ri} \frac{df_i}{d\alpha_h} \qquad \alpha)$$
$$h = 2, 3, m,\ r = m+1, \ldots n)$$

Come risulta dal § precedente per integrare il sistema così trasformato non dovremo integrare la equazione (I) e quindi il sistema iacobiano, che si ottiene sostituendo nelle equazioni del sistema (S_1) per u una funzione incognita

degli integrali della (I). Ora questa ammette anzitutto come integrali $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m$ e ne ammette quindi anche altri $n-m$, $u_{m+1} \dots u_n$ indipendenti dai precedenti e fra di loro. Noi dimostreremo che questi soddisfanno anche alle equazioni del sistema (S_1). Osserviamo perciò anzitutto che $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots u_n$ saranno integrali indipendenti dalla (I), anche se si riguardino come variabili soltanto $\alpha_1, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$.

Ne segue che i minori di ordine $n-m$ della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{du_{m+1}}{d\alpha_1} & \frac{du_{m+1}}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{du_{m+1}}{dx_n} \\ \frac{du_{m+2}}{d\alpha_1} & \frac{du_{m+2}}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{du_{m+2}}{dx_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{du_n}{d\alpha_1} & \frac{du_n}{dx_{m+1}} & \dots & \frac{du_n}{dx_n} \end{matrix} \right\|$$

non possono essere tutti nulli, e poiché sono nulli tutti quelli, che comprendono la prima colonna, come risulta osservando che $u_{m+1} \dots u_n$ soddisfanno alla (I), dovrà essere diverso da zero quello, che si ottiene sopprimendo la prima colonna; dal che si deduce che $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots u_n$ sono indipendenti anche considerate come funzioni di $x_{m+1} \dots x_n$ soltanto. Posto dunque

$$\left.\begin{aligned} u_{m+1} &= u_{m+1}(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m\ x_{m+1} \dots x_n) \\ u_{m+2} &= u_{m+2}(\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m\ x_{m+1} \dots x_n) \\ &- - - - - - - - - \\ u_n &= u_n\ (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m\ x_{m+1} \dots x_n) \end{aligned}\right\} \quad a)$$

potremo risolvere queste equazioni rispetto ad $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ e ne ritrarremo

$$\left.\begin{aligned} x_{m+1} &= x_{m+1}(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \\ x_{m+2} &= x_{m+2}(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= x_n(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \end{aligned}\right\} \quad b)$$

Indichiamo ora con $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots v_n$ quelle funzioni delle variabili $\alpha_2 : \alpha_3, \dots \alpha_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots u_n$ che si ottengono dalle precedenti espressioni di $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ ponendovi $\alpha_1 = \alpha_0$, cioè poniamo

$$\left.\begin{aligned} v_{m+1} &= x_{m+1}(\alpha_0\;\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \\ v_{m+2} &= x_{m+2}(\alpha_0\;\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n &= x_n(\alpha_0\;\alpha_2 \dots \alpha_m\; u_{m+1} \dots u_n) \end{aligned}\right\} \quad c)$$

Le equazioni (c) saranno, come è chiaro, identicamente soddisfatte, dalle espressioni di $u_{m+1}, \dots u_n$ date dalle (a), purchè in queste si ponga $\alpha_1 = \alpha_0$. Le funzioni $v_{m+1}, \dots v_n$ sono dunque indipendenti rispetto alle variabili $u_{m+1}, u_{m+2}, \dots u_n$ e costituiscono per ciò come queste un sistema fondamentale di integrali per la equazione (I), sempre che in questa si riguardino come variabili le sole $\alpha_1, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$. Potremo quindi supporre che il sistema $u_{m+1}, u_{m+2} \dots u_n$ coincidesse fin da principio col sistema $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots v_n$;

e in allora le funzioni $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ definite dalle (6) saranno tali che si avranno le identità

$$\left.\begin{array}{l} (x_{m+1})_{\alpha_1=\alpha_0} = u_{m+1} \\ (x_{m+2})_{\alpha_1=\alpha_0} = u_{m+2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_n)_{\alpha_1=\alpha_0} = u_n \end{array}\right\} \quad b')$$

Ciò premesso ricordiamo che per integrare il sistema proposto dobbiamo determinare tutte le funzioni $\underline{u}$ di $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_m, u_{m+1} \dots u_n$, le quali soddisfanno al sistema (S_1), cioè dobbiamo integrare il sistema iacobiano

$$\frac{du}{d\alpha_i} + \sum_{m+1}^{n}{}_h \mathcal{B}_{h,i} \frac{du}{du_h} = 0 \qquad S_2)$$
$$(i = 2, 3, \dots m)$$

essendo

$$\mathcal{B}_{h,i} = \frac{du_h}{d\alpha_i} + \sum_{m+1}^{n}{}_s C_{s,i} \frac{du_h}{dx_s}$$
$$(i = 2, 3, m;\ h = m+1, m+2, \dots n)$$

Ricordiamo ancora di avere dimostrato che le $\mathcal{B}_{h,i}$ sono indipendenti dalla variabile α_1, il che ci permette di dare in esse ad α_1 un valore arbitrario, per esempio di porvi $\alpha_1 = \alpha_0$. E poichè per $\alpha_1 = \alpha_0$ secondo le $(\mathcal{L})$, le $C_{s,i}$ si annullano e si annullano pure le $\frac{du_h}{d\alpha_i}$ per $h > m$ ed $i \leq m$, come risulta dalle (b'), troviamo $\mathcal{B}_{h,i} = 0$. Le equazioni del sistema (S_2) sono dunque le

$$\frac{du}{d\alpha_i} = 0 \quad (i = 2, 3 \dots m)$$

e ne risulta che esse sono soddisfatte per $u = u_{m+1}$,

$u = u_{m+2}, \dots u = u_n$. Queste funzioni adunque e per conseguenza ogni integrale della equazione (I), in cui si riguardino come variabili indipendenti $\alpha_1, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ soltanto, soddisfa a tutto il sistema proposto (S).

Concludiamo che per integrare questo sistema basta eseguire sopra di questo una trasformazione del tipo (T) ed integrare poi la sola equazione (I), considerando in questa come variabili $\alpha_2, x_{m+1}\; x_{m+2} \dots$ ed x_n soltanto.

9. Sistemi completi di equazioni a derivate parziali di 1° ordine.

Vediamo nel § 1 che il problema della integrazione di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine con n variabili indipendenti equivale a quello della integrazione di un sistema di $n-1$ equazioni differenziali ordinarie cioè con una sola variabile indipendente e con $n-1$ funzioni incognite. Vedremo ora, generalizzando quel risultato, come per $m < n$, il problema della integrazione di un sistema completo di m equazioni lineari ed omogenee a derivate parziali di 1° ordine equivalga a quello della integrazione di un sistema di $(n-m) \cdot m$ equazioni a derivate par-

ziali di 1° ordine con n - m funzioni incognite ed m variabili indipendenti che possono risolversi rispetto alle derivate prime delle funzioni incognite.

Perciò si consideri un sistema di n - m equazioni

$$x_s = \varphi_s (x_1\, x_2 \ldots x_m\, u_{m+1}\, u_{m+2} \ldots u_n), \quad 8)$$
$$(s = m+1, m+2, \ldots n)$$

che definisca $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ come funzioni delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_m$ e di n - m parametri $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_n$; e sia risolubile rispetto a questi. Sia

$$u_s = \psi_s (x_1\, x_2 \ldots x_n) \qquad 9)$$
$$(s = m+1, m+2, \ldots n)$$

il risultato della risoluzione e siano

$$\frac{dx_s}{dx_i} = A_{s,i} (x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad 10)$$
$$(i = 1, 2, \ldots m;\ s = m+1, \ldots n)$$

le equazioni, che si ottengono derivando le (8) e sostituendo nelle derivate ottenute ad $u_{m+1}, \ldots u_n$ i valori dati dalle (9). Il sistema simultaneo (10) sarà soddisfatto dalle espressioni (8) di $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$.

Siccome poi queste stesse espressioni rendono identiche le (9), renderanno pure identicamente soddisfatte le

$$\frac{d\psi_h}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n}{}_s \frac{d\psi_h}{dx_s} \frac{dx_s}{dx_i} = 0.$$
$$(i = 1, 2, \ldots m;\ h = m+1, m+2, n)$$

che si ottengono scrivando le (9) nella ipotesi di quella sostituzione. Per conseguenza le (8) soddisfaranno anche alle

$$\frac{d\psi_h}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_s A_{si} \frac{d\psi_h}{dx_s} = 0$$

Se si osserva però che, se queste non fossero identità anche prima della sostituzione ad $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ delle loro espressioni (8), queste condurrebbero a delle relazioni tra le sole variabili $x_1, x_2, \dots x_n$, il che è contradetto dalla ipotesi fatta che esse siano risolubili rispetto ad $u_{m+1} \dots u_n$, si conclude che $\psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots \psi_n$ sono altrettanti integrali del sistema

$$(i = 1, 2, \dots m); \; \frac{du}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_s A_{si} \frac{du}{dx_s} = 0 \qquad III)$$

Questo sistema è dunque iacobiano e tale che le espressioni che si traggono risolvendo rispetto alle costanti arbitrarie un sistema integrale completo del sistema (10) ci danno per esso un sistema fondamentale di integrali.

Che esso sia iacobiano può anche verificarsi osservando che perciò è necessario e basta siano soddisfatte le condizioni

$$\frac{dA_{rj}}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n} {}_s A_{si} \frac{dA_{rj}}{dx_s} = \frac{dA_{ri}}{dx_j} + \sum_{m+1}^{n} {}_s A_{sj} \frac{dA_{ri}}{dx_s} \qquad 11)$$

e che le (10) diventano identità, se per $x_{m+1} \dots x_n$ vi si sostituiscono i valori dati dalle (8). Valgono dunque le

$$\frac{d^2 x_r}{dx_i dx_j} = \frac{d \mathcal{A}_{ri}}{dx_j} + \sum_{m+1}^{n} {}_s \mathcal{A}_{sj} \frac{d \mathcal{A}_{ri}}{dx_s} \qquad 12),$$

e le (11), che in conseguenza di queste, debbono diventare identità dopo le indicate sostituzioni, sussisteranno identicamente, per una osservazione già fatta, anche quando si riguardino le x come tutte indipendenti fra di loro.

Dalle (12) risulta che le equazioni (11), le quali esprimono le condizioni perchè il sistema (III) sia iacobiano, esprimono in pari tempo le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema (10) sia tale, che riescano in virtù delle (10) stesse identicamente soddisfatte tutte le equazioni di 1° ordine, che se ne possono trarre mediante derivazione ed eliminazione delle derivate seconde. Quando queste equazioni sono identicamente soddisfatte diciamo che il sistema (10) è completo od incondizionatamente integrabile.

Si dimostrerà ora che reciprocamente, se u_{m+1}, $u_{m+2}, \ldots u_n$ costituiscono un sistema fondamentale di integrali pel sistema iacobiano (III), le equazioni

$$\left.\begin{array}{c} u_h (x_1 \; x_2 \ldots x_n) = u_h \\ (h = m+1 \ldots n), \end{array}\right\} \qquad 13)$$

(essendo nei secondi membri le u_h delle costanti arbitrarie) sono risolubili rispetto ad $x_{m+1} \ldots x_n$,

e tali di più che le espressioni, che se ne traggono per queste in funzione di $x_1, x_2, \ldots x_m$, soddisfanno alle (10); in altri termini che questo sistema ha per integrale generale il sistema (13). Poichè $u_{m+1}\ u_{m+2} \ldots u_n$ sono integrali del sistema (III) è chiaro che nella matrice

$$\left|\begin{matrix} \frac{du_{m+1}}{dx_1} & \frac{du_{m+1}}{dx_2} \cdots & \frac{du_{m+1}}{dx_m} & \frac{du_{m+1}}{dx_{m+1}} \cdots & \frac{du_{m+1}}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{du_n}{dx_1} & \frac{du_n}{dx_2} \cdots & \frac{du_n}{dx_m} & \frac{du_n}{dx_{m+1}} \cdots & \frac{du_n}{dx_n} \end{matrix}\right|$$

si annullano tutti i minori di ordine $n-m$, che comprendono una delle prime $\underline{m}$ colonne. Poichè la matrice non è nulla identicamente, (per ipotesi $u_{m+1}\ u_{m+2} \ldots u_n$ costituiscono un sistema fondamentale) sarà dunque diverso da $\underline{0}$ il minore della detta matrice formato colle ultime $n-m$ colonne, il che equivale a dire che le (13) sono risolubili rispetto ad $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_n$. Se si osserva di più che le (13) derivate dànno

$$\frac{du_h}{dx_i} + \sum_{m+1}^{n}{}_s \frac{du_h}{dx_s} \frac{dx_s}{dx_i} \equiv 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots m,\ h \equiv m+1, \ldots n),$$

e queste si confrontano colle identità, che risultano dalle (III) per la sostituzione di $u_{m+1}, \ldots u_n$ ad $\underline{u}$, si giunge alle

$$\sum_{m+1}^{n} {}_s \left(A_{si} - \frac{dx_s}{dx_i} \right) \frac{du_h}{dx_s} = 0 ,$$

$$(i = 1, 2, \dots m, \; h = m+1, \dots n)$$

Queste, essendo diverso da o il determinante

$$\left(\frac{du_{m+1}}{dx_{m+1}} \dots \frac{du_n}{dx_n} \right) ,$$

equivalgono appunto alle (10). Possiamo dunque concludere che

„ Le condizioni necessarie e sufficienti per
„ che un sistema di equazioni (10) sia completo
„ coincidono con quelle necessarie e sufficien-
„ ti perchè sia iacobiano il corrispondente si-
„ stema di equazioni (III). I due problemi poi
„ dell'integrazione dell'uno o dell'altro sistema
„ si equivalgono, dacchè, se $u_{m+1} \dots u_n$ costituiscono
„ un sistema fondamentale di integrali pel si-
„ stema (III), le equazioni

$$u_h (x_1 \, x_2 \dots x_n) = u_h ,$$
$$(h = m+1, \dots n)$$

„ definiscono $x_{m+1} \dots x_n$ in funzione di $x_1 \dots x_m$ e del-
„ le $n-m$ costanti arbitrarie $u_{m+1} \dots u_n$, e, recipro-
„ camente se queste equazioni, nei secondi mem-
„ bri delle quali le u_h rappresentino delle costanti
„ arbitrarie, si possono risolvere rispetto ad $x_{m+1} \dots x_n$
„ e le funzioni così ottenute soddisfanno al sistema
„ (10), i loro primi membri costituiscono un sistema

„fondamentale di integrali pel sistema (III)."

Ne segue che

„Le funzioni $x_{m+1}\, x_{m+2} \dots x_n$ per valori arbi-
„trari delle variabili indipendenti $x_1\, x_2 \dots x_m$ e per
„valori convenientemente scelti delle costanti
„arbitrarie assumono valori arbitrari."

10. Si abbia ora un sistema di equazioni della forma

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2 v}{dx_r \partial x_s} = A_{rs} \\ (r, s = 1, 2 \dots n),\end{array}\right\} \quad A)$$

$x_1, x_2, \dots x_n$ essendo variabili indipendenti, v una funzione incognita, e le A_{rs} funzioni date di $x_1, x_2, \dots x_n$, di v e delle derivate prime di questa rispetto a quelle. Posto

$$\frac{dv}{dx_r} = p_r, \qquad 14)$$

al sistema stesso si può sostituire quello, che risulta dalle (14) e delle

$$\frac{dp_r}{dx_s} = A_{rs}, \qquad 14_1)$$

nei secondi membri delle quali intenderemo sostituite le derivate di v colle p.

Le (14) danno le

$$\frac{d^3 v}{dx_r\, dx_s\, dx_t} = \frac{dA_{rs}}{dx_t} + \sum_1^n {}_h \frac{dA_{rs}}{dp_h} A_{ht} + p_t \frac{dA_{rs}}{dv},$$

e quindi perchè il sistema (14) per la derivazione ed eliminazione delle derivate di ordine superiore al pri-

mo non conduca ad alcuna equazione di 1° ordine, cioè, come diremo, perchè il sistema stesso sia completo è necessario e basta che le equazioni

$$\mathcal{A}_{rs} = \mathcal{A}_{sr}$$

$$\left.\frac{d\mathcal{A}_{rs}}{dx_t} + \sum_{1}^{n}{}_h \frac{d\mathcal{A}_{rs}}{dp_h}\mathcal{A}_{ht} + p_t\frac{d\mathcal{A}_{rs}}{dv} = \frac{d\mathcal{A}_{rt}}{dx_s} + \sum_{1}^{n}{}_h \mathcal{A}_{hs}\frac{d\mathcal{A}_{rt}}{dp_h} + p_s\frac{d\mathcal{A}_{rt}}{dv}\right\} \quad 15)$$

siano soddisfatte identicamente, cioè riguardando le x, le p e v come variabili fra loro indipendenti. Soddisfatte le (15), pel teorema del § 9 sarà iacobiano il sistema

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{du}{dx_i} + p_i\dfrac{du}{dv} + \displaystyle\sum_{1}^{n}{}_r \mathcal{A}_{ir}\frac{du}{dp_r} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots n)\end{array}\right\} \quad \mathcal{A}_1),$$

che comprende n equazioni, e in cui le variabili indipendenti sono $2n+1$. I suoi $n+1$ integrali indipendenti eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie daranno quindi v e le p in funzione di queste e delle variabili indipendenti $x_1, x_2 \dots x_n$.

La funzione v così determinata soddisfarà alle equazioni ($\mathcal{A}$) e le p ne saranno le derivate prime.

„ Le costanti arbitrarie si potranno poi sempre
„ determinare in modo che per valori arbitrarii
„ di $x_1, x_2, \dots x_n$, v e le sue derivate prime assumano
„ valori pure arbitrarii."

Si ottiene che, se le A_{rs} non contengono la funzione incognita $\underline{v}$, ma soltanto le sue derivate prime, le condizioni (15) rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti perchè sia iacobiano il sistema

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{du}{dx_i} + \sum_{1}^{n}{}_r A_{ir} \dfrac{du}{dp_r} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots n)\end{array}\right\} \qquad A'_1)$$

In questo caso invece del sistema A_1) si può integrare il sistema A'_1), che ha una variabile indipendente di meno. Allora i suoi $\underline{n}$ integrali indipendenti eguagliati ad altrettanti costanti arbitrarie daranno le p_r in funzione di queste e delle x_r e i valori così determinati per le p_r saranno tali che

$$\sum_{1}^{n}{}_r p_r\, dx_r$$

sarà un differenziale esatto. Posto

$$v = \int \sum_r p_r\, dx_r ,$$

la funzione $\underline{v}$ soddisfarà al sistema proposto (A).

11. Si supponga in secondo luogo di avere un sistema di equazioni a derivate parziali di 2° ordine con una sola incognita $\underline{v}$, il quale possa risolversi rispetto alle derivate seconde di $\underline{v}$ e comprenda di più un certo numero $h < n$ di equazioni di 1° ordine tra loro indipendenti tra le quali non

possano eliminarsi le derivate prime di v. Alle equazioni del § precedente fatte le posizioni (14), saranno in questo caso da aggiungere h equazioni della forma.

$$\left.\begin{array}{c} f_i\,(p_1, p_2, \dots p_n, v, x_1\, x_2 \dots x_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots h) \end{array}\right\} \quad B)$$

Diremo ancora che un tale sistema è completo se esso è tale che mediante la derivazione e la eliminazione delle derivate seconde e terze non si possono ottenere nuove equazioni, che non siano già contenute nel sistema. Perciò oltre alle (15) dovranno essere soddisfatte anche le equazioni

$$\frac{df_i}{dx_t} + p_t \frac{df_i}{dv} + \sum_1^n{}_r\, A_{rt} \frac{df_i}{dp_r} = 0, \qquad 16)$$

identicamente, o, tenuto conto delle (B).

Se supponiamo che le (15) e (16) siano soddisfatte identicamente, cioè anche prescindendo dalle (B), $f_1, f_2, \dots f_h$ sono integrali del sistema (A). Per mezzo di essi potremo quindi (§ 3) sostituire al sistema (A) un sistema iacobiano con $2n+1-h$ variabili indipendenti soltanto. Ogni sistema fondamentale di integrali del nuovo sistema conterrà quindi $n-h+1$ integrali indipendenti da $f_1, f_2, \dots f_h$, i quali eguagliati ad altrettante costanti arbitrarie ed uniti alle (B) determineranno la fun-

zione v e le sue derivate prime.

Se le (15) e (16) sono soddisfatte soltanto tenendo conto delle (B), potremo supporle risolute rispetto a $p_{n-h+1}, p_{n-h+2}, \dots p_n$. Alle (B) sostituiremo così il sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{c} p_k = \varphi_k\,(x_1\, x_2 \dots x_n\; v\; p_1\, p_2 \dots p_{n-h}) \\ (k = n-h+1, n-h+2, \dots n) \end{array}\right\} \quad B')$$

ed avremo da integrare un sistema di equazioni della forma

$$\frac{dv}{dx_r} = p_r\,, \quad \frac{dp_r}{dx_s} = A_{rs}\,, \quad \frac{dv}{dx_k} = \varphi_k\,,$$
$$(r = 1, 2, \dots n-h\,;\; k = n-h+1, \dots n\,;\; s = 1, 2, \dots n)$$

nelle quali le A_{rs}, come le φ_k, potranno supporsi contenere soltanto le variabili

$$x_1\,, x_2\,, \dots x_n\,, v\,, p_1\,, p_2\,, \dots p_{n-h}\,,$$

le

$$p_{n-h+1}\,, p_{n-h+2} \dots p_n$$

essendo state eliminate mediante le (B'). Per le ipotesi fatte questo sistema, che è ancora della forma di quello considerato nel § 9, sarà completo, e la sua integrazione dipenderà da quella del sistema iacobiano

$$\frac{du}{dx_i} + p_i \frac{du}{dv} + \sum_{1}^{n-h}{}_r\, A_{i,r} \frac{du}{dp_r} = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots n)\,;$$

nelle quali alle $p_{n-h+1} \dots p_n$ debbono intendersi sostituite le loro espressioni date dalle (B'). Esso ammetterà quindi $n-h+1$ integrali indipendenti, che come

nel caso precedente, serviranno a determinare $\underline{v}$ e $p_1, p_2, \dots p_{n-h}$, e quindi, per le (B'), $p_{n-h+1} \dots p_n$.
In ogni caso la integrazione introdurrà $n-h+1$ costanti arbitrarie, le quali potranno determinarsi in modo che, per valori arbitrarî delle variabili indipendenti $\underline{v}$ e $p_1, p_2, \dots p_{n-h}$ assumano valori pure arbitrarî.

12. In generale si abbia un sistema di equazioni a derivate parziali di ordine $\underline{m}$ con $\underline{n}$ variabili indipendenti e $\underline{N}$ funzioni, le quali possono risolversi rispetto alle derivate di ordine $\underline{m}$, ma non rispetto a quelle di un ordine inferiore qual si voglia. Potremo supporre che tra esse non possano eliminarsi tutte le derivate delle funzioni incognite, giachè, altrimenti, si perverrebbe ad una o più relazioni tra queste, le quali permetterebbero di eliminare una o più delle funzioni incognite. Potranno invece, oltre alle equazioni risolute rispetto alle derivate di ordine m, appartenere al sistema altre equazioni tra le derivate degli ordini inferiori le funzioni incognite e le variabili indipendenti. Si dirà che il sistema è completo, se da esso non possono, mediante derivazione ed eliminazione delle derivate d'ordine m ed $m+1$ dedursi nuove equazioni

di ordine minore di $\underline{m}$: che non è completo nel caso opposto. È chiaro che, se un sistema costituito nel modo esposto sopra non è completo, mediante un numero sufficiente di derivazioni si potrà da esso passare ad un sistema completo costituito nello stesso modo e di ordine $\leq m$.

Considerazioni, che non differiscono essenzialmente da quelle svolte nei paragrafi precedenti, permettono di concludere che la integrazione di un qualunque sistema completo costituito nel modo indicato sopra equivale alla integrazione di un sistema iacobiano e che il numero delle costanti arbitrarie contenute nel suo sistema integrale generale è eguale a quello delle funzioni incognite e delle loro derivate di ordine inferiore ad $\underline{m}$ diminuito del numero $\underline{p}$ delle equazioni del sistema di ordine pure inferiore ad m. Scegliendo opportunamente queste costanti si possono, per valori iniziali arbitrarï delle variabili attribuire alle funzioni incognite ed alle loro derivate d'ordine inferiore ad $\underline{m}$ valori qualunque, purchè compatibili colle equazioni di ordine inferiore ad m, che appartengono al sistema.

Il Lie (1) ha dimostrato di più che i soli sistemi, di cui qui abbiamo fatto parola, godono della proprietà che le loro soluzioni generali dipendono da un numero finito di costanti arbitrarie.

Capitolo Secondo

Nozioni Generali sulle Forme differenziali quadratiche.

Formole di trasformazione pei coefficienti di una forma differenziale quadratica e pei loro elementi reciproci. Simboli di Christoffel e di Riemann. — Invariante di Gauss per le forme binarie. Simboli di Riemann a due indici per le forme ternarie.

---

13. Si indichino con $x_1, x_2, \dots x_n$ n variabili indipendenti e con

$$a_{rs} = a_{sr}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$ funzioni di queste variabili. Ogni espressione della forma

$$\varphi = \sum_{rs}^{n}{}_{1} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

cioè omogenea e di secondo grado rispetto ai

---

(1) Theorie der Transformationsgruppen; Erster Abschnitt, Kapitel 10.

differenziali delle x si dice forma differenziale quadratica. Il determinante

$$a = (a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn})$$

si dice poi discriminante della forma φ.

Noi supporremo questo discriminante diverso da 0 e ricercheremo dapprima che cosa avvenga della forma stessa, cioè dei suoi coefficienti e di alcune espressioni, che dipendono dalle derivate di questi, quando si faccia un cambiamento di variabili. Immaginiamo di sostituire alle $x_1, x_2, \ldots x_n$ altre n variabili indipendenti $y_1, y_2, \ldots y_n$ e per commodità di notazione conveniamo di designare con $x_r^{(p)}$ la derivata di x_r rispetto ad y_p; ed analogamente con $y_q^{(s)}$ quella di y_q rispetto ad x_s.

Avendosi

$$dx_r = \sum_p^n x_r^{(p)}\, dy_p\,,$$

per la sostituzione delle y alle x la φ assume la espressione

$$(\varphi) = \sum_{1pq}^n (a_{pq})\, dy_p\, dy_q\,,$$

ponendosi

$$\left.\begin{aligned} (a_{pq}) &= \sum_{1rs}^n a_{rs}\, x_r^{(p)}\, x_s^{(q)} \\ (p, q &= 1, 2, \ldots n) \end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Indicando con (a) il discriminante di (φ) e ponendo

$$D = \frac{d(x_1\, x_2 \cdots x_n)}{d(y_1\, y_2 \cdots y_n)}\,,$$

dalle (1) e dal teorema di moltiplicazione dei determinanti si ricava

$$(a) = a \cdot \mathfrak{D}^2 \qquad 2)$$

Questa formula ci dice che la condizione da noi posta che il discriminante di φ non sia nullo è indipendente dal sistema di variabili indipendenti prescelto. Designamo con $\underline{a}^{(rs)}$ e chiamiamo elementi reciproci degli elementi a_{rs} di $\underline{a}$ i complementi algebrici di questi elementi divisi per $\underline{a}$, ed analogamente con $(a^{(pq)})$ gli elementi reciproci degli elementi (a_{pq}) di (a) divisi per (a) e cerchiamo le relazioni, che legano gli uni agli altri. A questo oggetto poniamo

$$c_{tu} = \sum_{1}^{n}{}_{v}\, a_{uv}\, x_v^{(t)} \qquad 3)$$
$$(t, u = 1, 2 \dots n)$$

e consideriamo il determinante

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2n} \\ - - - & - - - & - - - \\ c_{n1} & c_{n2} \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Per le (3) le (1) assumono la forma

$$(a_{pq}) = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, c_{qr}\, x_r^{(p)},$$

e ne risulta che il minore complementare dell'elemento (a_{pq}) di (a), cioè $(-1)^{p+q}(a) \cdot (a^{(pq)})$ è il prodotto della matrice, che si ottiene da $\underline{C}$ sopprimendone

la riga q^{esima} per quella che si ottiene dal determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \dots & x_n^{(2)} \\ - & - & - \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

sopprimendone la riga p^{sima}. Se dunque si indica con C_{qs} il minore complementare dell'elemento c_{qs} di $\underline{C}$ e si osserva che $(-1)^{p+s}\mathfrak{D}\, y_p^{(s)}$ è il minore complementare dell'elemento $x_s^{(p)}$ in $\mathfrak{D}$, dal teorema di moltiplicazione delle matrici si traggono le

$$(-1)^q (a)\,(a^{(pq)}) = \mathfrak{D} \sum_s (-1)^s C_{qs}\, y_p^{(s)}. \qquad (4)$$

Per trovare la espressione delle C_{qs} basta osservare che, come risulta dalle (3), ogni determinante C_{qs} è il prodotto della matrice, che si ottiene sopprimendo la riga s^{sima} del determinante $\underline{a}$ per quella, che si ottiene da $\underline{\mathfrak{D}}$ sopprimendone la riga q^{sima}. Le espressioni, di cui si tratta; sono dunque date dalle

$$C_{qs} = (-1)^{q+s}\, a\, \mathfrak{D} \sum_r a^{(rs)}\, y_q^{(r)},$$

le quali combinate colle (2) e colle (4) ci danno le espressioni cercate sotto la forma

$$(a^{(pq)}) = \sum_{1\,rs}^{n} a^{(rs)}\, y_p^{(r)}\, y_q^{(s)} \qquad 5)$$
$$(p, q = 1, 2, \dots n)$$

14. Come abbiamo fatto fin qui, dovendo considerare simultaneamente due espressioni φ e (φ) della stessa forma differenziale quadratica corrispondenti a due sistemi di variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots x_n$; $y_1, y_2, \dots y_n$, ogni notazione stabilita pel caso che le variabili indipendenti siano le $\underline{x}$ varrà anche per le variabili y, purchè i simboli addottati nel primo caso si racchiudano tra parentesi. Di più si indicheranno rispettivamente con $x_r^{(st)}$, $x_r^{(stu)}, \dots$ le derivate seconde, terze ecc. delle x_r rispetto ad y_s ed y_t ovvero ad y_s, y_t ed $y_u \dots$ e significati analoghi avranno i simboli $y_r^{(pq)}, y_r^{(pql)} \dots$ quando le y si considerino come funzioni delle x. Si facciano le posizioni

$$2a_{rs,t} = \frac{da_{rt}}{dx_s} + \frac{da_{st}}{dx_r} - \frac{da_{rs}}{dx_t} \qquad 6)$$
$$(r, s, t = 1, 2 \dots n)$$

i simboli $a_{rs,t}$ si dicono simboli di Christoffel. Essi sono simmetrici rispetto ai primi due indici e perciò il loro numero è $\frac{n^2(n+1)}{2}$.

Se ora si derivano le (1) rispetto ad una y_m qualunque e si combinano opportunamente le formole così ottenute si giunge alle

$$(a_{pq,m}) = \sum_1^n {}_t\, x_t^{(m)} \left\{ \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs,t}\, x_r^{(p)} x_s^{(q)} + \sum_r a_{rt}\, x_r^{(pq)} \right\} \qquad 7)$$
$$(p, q, m = 1, 2 \dots n)$$

le quali sono tante quante le derivate seconde delle x e possono essere risolute rispetto a queste. La risoluzione dà per queste derivate le espressioni

$$x_t^{(pq)} = \sum_{1\,lm}^{n} (a^{(lm)}) (a_{pq,m}) x_t^{(l)} - \sum_{1\,lrs}^{n} a^{(lt)} \text{[illegible]} x_r^{(p)} x_s^{(q)} \qquad 7')$$
$$(p, q, t = 1, 2 \dots n)$$

Dalle (6) si traggono le

$$\frac{da_{rs}}{dx_t} = a_{rt,s} + a_{st,r} \qquad 6')$$
$$(r, s, t = 1, 2 \dots n)$$

che esprimono le de[illegible] prime delle a_{rs} per i simboli di Christof[illegible]

15. Chiameremo simboli di Riemann [illegible]sioni a quattro indici

$$a_{rt,su} = \frac{da_{rs,t}}{dx_u} - \frac{da_{ru,t}}{dx_s} + \sum_{1\,hk}^{n} a^{(hk)} (a_{ru,h} a_{st,k} - a_{rs,h} a_{tu,k}) \; ; \qquad 8)$$

che sono di 2° ordine nei coefficienti della forma φ. Come è facile verificare, i simboli di Riemann soddisfanno identicamente alle relazioni

$$a_{rt,su} = a_{su,rt} \qquad 9)$$
$$a_{rt,su} + a_{tr,su} = 0 \qquad 10)$$
$$a_{rt,su} + a_{ru,ts} + a_{rs,ut} = 0 \qquad 11)$$

Ne scendono le

$$\left.\begin{aligned} a_{rt,su} + a_{rt,us} &= 0 \\ a_{rr,su} = a_{rs,tt} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad 12)$$

Ne segue pure:

1° Che i simboli di Riemann con due soli indici distinti e indipendenti fra di loro si possono ridurre a quelli del tipo $a_{rs,rs}$ con $r \lesseqgtr s$: il loro numero è quindi $\frac{n(n-1)}{2}$.

2° Che i simboli di Riemann con tre soli indici distinti ed indipendenti fra di loro si possono tutti ridurre al tipo

$$a_{rs,rt} \text{ ; } r, s \text{ e } t$$

essendo distinti fra di loro: il loro numero è quindi $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$.

3° Che i simboli di Riemann ad indici tutti distinti ed indipendenti fra di loro sono in numero di $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$.

Il numero totale dei simboli di Riemann è dunque $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$

Si tratta ora di stabilire le formole di trasformazioni pei simboli di Riemann; cioè le relazioni, che legano fra loro questi simboli calcolati per le variabili y con quelli calcolati per le variabili x. Per ciò si derivino le (7) rispetto ad una y_l ed alle derivate seconde delle x, che così vengono ad introdursi si sostituiscano le espressioni date dalle (7'). In tal modo si perviene alle

$$\frac{d(a_{pq,m})}{dy_l} - \sum_{1}^{n}{}_{rs}(a^{(rs)})(a_{pq,r})(a_{lm,s}) =$$

$$= \sum_{1\,rstu}^{n} \left\{ \frac{da_{rs,t}}{dx_u} - \sum_{1\,hk}^{n} a^{(hk)} a_{rs,h} a_{tu,k} \right\} x_r^{(p)} x_s^{(q)} x_t^{(m)} x_u^{(l)}$$

$$+ \sum_{1\,t}^{n} x_t^{(m)} \left\{ \sum_{1\,r}^{n} a_{rt}\, x_r^{(pql)} + \sum_{1\,rs}^{n} a_{rs,t} \left(x_r^{(p)} x_s^{(ql)} + x_s^{(q)} x_r^{(pl)} + x_s^{(l)} x_r^{(pq)} \right) \right\}$$

$$(l, m, p, q = 1, 2 \ldots n);$$

e da queste alle relazioni cercate sotto la forma

$$\left. \begin{array}{c} (a_{mp,ql}) = \sum_{1\,rstu}^{n} a_{rs,tu}\, x_r^{(m)} x_s^{(p)} x_t^{(q)} x_u^{(l)} \\ (l, m, p, q = 1, 2 \ldots n) \end{array} \right\} \quad 13)$$

16. Per $n = 2$ si ha un solo simbolo di Riemann cioè il simbolo $a_{12,12}$ e le formole (13) si riducono quindi ad una sola; la quale si ottiene facendo nella (13) $m = q = 1$, $p = l = 2$, e sviluppando la sommatoria del secondo membro tenendo presenti le (9) e (10). Si perviene così successivamente alle

$$(a_{12.12}) = \mathfrak{D} \sum_{1\,tu}^{2} a_{12;tu}\, x_t^{(1)} x_u^{(2)}$$

$$(a_{12,12}) = \mathfrak{D}^2 a_{12,12}\,.$$

Da quest'ultima e dalla (2) posto

$$a \,.\, \mathcal{G} = a_{12,12} \qquad (14)$$

risulta la

$$(\mathcal{G}) = \mathcal{G}\,, \qquad (15)$$

la quale, nel caso di $n = 2$, equivale appunto alle (13).

La (15) ci dice che la espressione $\mathcal{G}$ definita dalla (14) è un invariante: essa sarà qui chia-

mata invarianti di Gauss.

17. Si supponga in secondo luogo $n=3$ e si convenga in questo caso di riguardare come equivalenti gli indici, che differiscono fra di loro per un multiplo di $\underline{3}$. È facile allora riconoscere che tutti i simboli di Riemann indipendenti fra di loro possono ridursi al tipo: $a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2}$, con $\underline{r}$ ed $\underline{s}$ qualunque. Si facciano le posizioni

$$a.\alpha^{(rs)} = a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2} \qquad 16)$$

Dalle (13) si trovano le

$(a).(\alpha^{(pq)}) \equiv \sum_{1\, rstu}^{n} a_{rs,tu}\, x_r^{(p+1)} x_s^{(p+2)} x_t^{(q+1)} x_u^{(q+2)}$, le quali, osservando che per la convenzione fatta, ogni indice di sommatoria $\underline{r}$ può essere cambiato in $r+1$ od $r+2$ ed avendo presenti le (10) assumono la forma

$$(a).(\alpha^{(pq)}) = \sum_{1\, rtu}^{n} a_{r+1\, r+2,\, tu}\, x_t^{(q+1)} x_u^{(q+2)} \left(x_{r+1}^{(p+1)} x_{r+2}^{(p+2)} - x_{r+2}^{(p+1)} x_{r+1}^{(p+2)}\right),$$

ovvero per le note proprietà dei determinanti funzionali:

$$(a).(\alpha^{(pq)}) = D \sum_{1\, rtu}^{n} a_{r+1\, r+2,\, tu}\, y_p^{(r)} x_t^{(q+1)} x_u^{(q+2)}.$$

In fine queste, tenuto conto anche della (2); si trasformano nelle

$$(\alpha^{(pq)}) = \sum_{rs} \alpha^{(rs)} y_p^{(r)} y_q^{(s)}, \qquad 17)$$

le quali, nel caso di $n=3$, equivalgono alle (13).

Si osservi ancora che dalle (9) e (16) si traggo-

-no le

$$\alpha^{(rs)} = \alpha^{(sr)} \quad ; \qquad 18)$$

le quali ci dicono che i simboli $\alpha^{(rs)}$ sono simmetrici rispetto ai due indici, da cui dipendono. Le espressioni $\alpha^{(rs)}$ definite dall' (16) si diranno simboli di Riemann a due indici per le forme ternarie.

Capitolo Terzo

Del calcolo differenziale assoluto ad n variabili

Sistemi di funzioni in generale. Sistemi invariabili e variabili. Sistemi covarianti e controvarianti. Somme e prodotti di sistemi. Sistemi composti. Sistemi associati ad una forma fondamentale. Sistemi reciproci rispetto a questa. Derivazioni covariante e controvariante secondo una forma fondamentale. Principio di dualità. Un teorema del Calcolo delle variazioni.

---

18. Dobbiamo ora esporre i metodi del Calcolo Differenziale assoluto, il quale si distingue dal Calcolo differenziale ordinario per ciò, che le formole e le equazioni, a cui per esso si giunge, hanno un carattere indipendente dalla scelta delle variabili, e valgono quindi nello stesso modo qualunque sia il sistema di variabili prescelto.

Chiamiamo sistema m.^{uplo} o di ordine $\underline{m}$ ad $\underline{n}$ variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ l'insieme di n^m funzioni, distinte o no, di queste variabili, che possono rappresentarsi con una sola lettera munita di $\underline{m}$ indici, ciascuno dei quali può assumere tutti i valori $1, 2, \dots n$; per esempio col simbolo $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$. In particolare $\underline{n}$ funzioni $X_1, X_2, \dots X_n$ costituiscono un sistema semplice o di 1° ordine; un sistema doppio o di 2° ordine sarà rappresentato da un simbolo X_{rs}, se gli indici $\underline{r}$ ed $\underline{s}$ possono assumere tutti i valori da $\underline{1}$ fino ad n. Si chiamano elementi di un sistema tutte le funzioni, che lo costituiscono.

Un sistema si dice simmetrico, se agli stessi indici comunque permutati fra di loro corrisponde sempre un identico elemento: così che un sistema simmetrico di ordine m ad n variabili risulta di $\binom{n+m-1}{m}$ elementi distinti soltanto.

Per generalizzazione una funzione considerata isolatamente si riguarda come un sistema di ordine 0.

Esempi: Le derivate prime di una funzione delle n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ costituiscono un sistema semplice ad n variabili: in generale le derivate di ordine m costituiscono un sistema

simmetrico m^{uplo}. — I coefficienti di una forma differenziale quadratica costituiscono un sistema doppio simmetrico e così pure i loro elementi reciproci. I simboli di Riemann costituiscono un sistema quadruplo, che però, per le considerazioni dei §. 16 e 17, può essere sostituito da un sistema di ordine $\underline{0}$, cioè da una sola funzione $\underline{G}$ nel caso di $n = 2$, e dal sistema dei simboli di Riemann a due indici nel caso di $n = 3$. Numerosi esempi di sistemi di funzioni offrono la Geometria, la Meccanica Razionale e la Fisica Matematica.

Un sistema di funzioni si dice invariabile, se per la sostituzione alle n variabili indipendenti $\underline{x}$ di altrettante variabili indipendenti y, gli elementi del sistema rimangono gli stessi di prima espressi per le variabili $\underline{y}$ invece che per le x. Si dice invece che un sistema è variabile se per l'accennato cambiamento di variabili indipendenti, non soltanto in ogni elemento del sistema alle x si intendono sostituite le loro espressioni per le y, ma gli stessi elementi del sistema $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ si intendono sostituiti da altri $(X_{p_1 p_2 \cdots p_m})$ legati a quelli da relazioni prestabilite. Perchè un sistema variabi-

le sia completamente definito è dunque necessario:

1.° conoscerne gli elementi per un dato sistema, del resto qualunque, di variabili.

2.° conoscere la legge, secondo cui questi elementi variano, quando si passa da uno ad un altro sistema qualunque di variabili indipendenti.

Questa legge può essere considerata come arbitraria, purchè tale da non alterare l'ordine del sistema. Però essa è, in generale, determinata dal significato analitico, geometrico, meccanico etc... del sistema, se tale significato è in qualche modo collegato colle variabili indipendenti e deve restare inalterato col cambiare di queste. Se per esempio, un sistema semplice è definito come quello, che ha per elementi le derivate prime di una funzione U rispetto alle variabili indipendenti, qualunque queste siano, ed alle variabili $x_1\ x_2 \ldots x_n$ si sostituiscono delle nuove variabili $y_1, y_2, \ldots y_n$, non basterà sostituire le x colle loro espressioni per le y nelle espressioni delle $\frac{dU}{dx_1}, \frac{dU}{dx_2}, \ldots \frac{dU}{dx_n}$, ma converrà ancora sostituire a questi gli elementi $\frac{dU}{dy_1}, \frac{dU}{dy_2}, \ldots \frac{dU}{dy_n}$

legati ad essi dalle relazioni

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dy_r} = \sum_1^n {}_s \frac{d\mathfrak{U}}{dx_s} x_s^{(r)}$$

Del pari se un sistema è definito come quello dei coefficienti delle derivate di $\mathfrak{U}$ rispetto alle variabili indipendenti nella espressione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine

$$\sum_1^n {}_r X^{(r)} \frac{d\mathfrak{U}}{dx_r},$$

quando alle x si sostituiscano le y, alle $X^{(r)}$ converrà sostituire le $(X^{(r)})$ legate ad esse dalle relazioni

$$(X^{(r)}) = \sum_1^n {}_s X^{(s)} y_r^{(s)}.$$

Così pure quando si consideri il sistema, che ha per elementi i coefficienti di una forma differenziale quadratica ad $\underline{n}$ variabili

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

e quello, che ha per elementi gli elementi reciproci $a^{(rs)}$ di questi coefficienti, quando ad un sistema di variabili indipendenti $\underline{x}$ si sostituisca un nuovo sistema di variabili pure indipendenti y, agli elementi a_{rs} od $a^{(rs)}$ si dovranno sostituire gli elementi (a_{pq}) ed $(a^{(pq)})$ legati rispettivamente agli uni od agli altri, dalle relazioni (1) e (5) del Capitolo II.

19. Noi dobbiamo occuparci in particolare di

due specie di sistemi variabili, che diremo rispettivamente covarianti e controvarianti; e che distingueremo gli uni dagli altri col porre pei primi gli indici in basso e pei secondi gli indici in alto della lettera, con cui si rappresentano tutti gli elementi. Diremo che un sistema è covariante se, quando si sostituiscono le variabili y alle x, i suoi elementi $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sono sostituiti dagli elementi

$$(X_{r_1 r_2 \dots r_m}) = \sum_{1\, s_1 s_2 \dots s_m}^{n} X_{s_1 s_2 \dots s_m} x_{s_1}^{(r_1)} x_{s_2}^{(r_2)} \dots x_{s_m}^{(r_m)} \qquad 1)$$

A questa specie appartengono il sistema semplice, che ha per elementi le derivate di una funzione; il sistema doppio, che ha per elementi i coefficienti di una forma differenziale quadratica; il sistema quadruplo, che ha per elementi i simboli di Riemann.

Diremo invece che un sistema è controvariante se, quando si sostituiscono le variabili y alle x, i suoi elementi $Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ sono sostituiti dagli elementi

$$(Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)}) = \sum_{1\, s_1 s_2 \dots s_m}^{n} Y^{(s_1 s_2 \dots s_m)} y_{r_1}^{(s_1)} y_{r_2}^{(s_2)} \dots y_{r_m}^{s_m} \qquad 2)$$

A questa specie appartengono il sistema semplice, che ha per elementi le derivate delle variabili indipendenti rispetto ad un'altra variabile, delle quali esse si riguardino come funzioni; e quello, che ha per elementi i coefficienti di una espressione li-

neare ed omogenea rispetto alle derivate prime di una funzione: vi appartiene altresì il sistema doppio, che ha per elementi gli elementi reciproci dei coefficienti di una forma differenziale quadratica. — Nel caso delle forme ternarie i simboli di Riemann a due indici costituiscono come risulta dalle (17) del Capitolo Secondo, un sistema doppio controvariante.

I sistemi di ordine $\underline{o}$ possono in questa teoria riguardarsi come invarianti. Poichè la formola

$$(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$$

può considerarsi compresa (per $m = o$) tanto nelle (1) che nelle (2) i sistemi di ordine $\underline{o}$ possono riguardarsi come un caso speciale tanto dei sistemi covarianti che dei controvarianti.

Si dice che un sistema è identicamente nullo, se lo sono tutti i suoi elementi. Ora dalle formole (1) e (2) risulta che

„ Un sistema covariante o controvariante identicamente nullo per un sistema di variabili indipendenti, è identicamente nullo per qualunque „ altro sistema."

20. Osserviamo che

1.° Se si hanno due sistemi covarianti, o contro-

varianti dello stesso ordine, per esempio i sistemi covarianti $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $Y_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, od i controvarianti $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$, $Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$, come risulta dalle (1) e dalle (2), saranno pure rispettivamente covarianti o controvarianti il sistema di elementi

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} + Y_{r_1 r_2 \cdots r_m}$$

e quello di elementi

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} + Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$$

Chiameremo tali sistemi somme dei sistemi dati. La somma di due sistemi di ordine m è essa pure, evidentemente, dello stesso ordine.

2° Se si hanno due sistemi covarianti di elementi $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $Y_{s_1 s_2 \cdots s_p}$, il sistema di elementi

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \cdot Y_{s_1 s_2 \cdots s_p}$$

sarà esso pure covariante, e si dirà prodotto dei due proposti. Analogamente si dirà prodotto di due sistemi controvarianti di elementi

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_n)}, \quad Y^{(s_1 s_2 \cdots s_p)}$$

il sistema controvariante di elementi

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} \cdot Y^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} .$$

Il prodotto di due sistemi covarianti o controvarianti, di ordini m e p è dunque di ordine $m+p$. È superfluo aggiungere le definizioni, che risultano da quelle date sopra per la somma di un numero qualunque di sistemi covarianti

o controvarianti dello stesso ordine; e pel prodotto di un numero qualunque di sistemi covarianti o controvarianti di ordini qualunque. Queste definizioni sono tutte giustificate da ciò che, come risulta dalle (1) e dalle (2), se un sistema covariante o controvariante può riguardarsi come la somma od il prodotto di un determinato numero di sistemi della stessa natura per un certo sistema, esso può riguardarsi come tale per qualunque sistema di variabili indipendenti.

21. Si abbiano due sistemi semplici, di cui uno covariante di elementi X_r e l'altro controvariante di elementi $Y^{(r)}$. Le formole di trasformazione

$$(X_p) = \sum_1^n{}_r X_r \, x_r^{(p)}$$

$$(Y^{(p)}) = \sum_1^n{}_s Y^{(s)} \, y_p^{(s)}$$

danno

$$\sum_1^n{}_p (Y^{(p)}) (X_p) = \sum_1^n{}_r Y^{(r)} X_r$$

Questa si dice che la espressione

$$\sum_1^n{}_r Y^{(r)} X_r$$

ha sempre lo stesso valore per qualunque sistema di variabili indipendenti, purchè per ogni cambiamento di queste alle X_r ed $Y^{(r)}$ si sostituisca

no contemporaneamente le (X_r) ed $(y^{(r)})$, eseguendo così sugli elementi dei due sistemi le sostituzioni, che loro spettano per la loro natura.

Si abbiano ora $\underline{m}$ sistemi covarianti

$$X_{1|r_1}, X_{2|r_2} \dots X_{m|r_m}$$

e $\underline{p}$ sistemi controvarianti

$$y_1^{(r_1)}, y_2^{(r_2)} \dots y_p^{(r_p)}$$

e si facciano le posizioni

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m} = X_{1|r_1} X_{2|r_2} \dots X_{m|r_m}$$
$$y^{(r_1 r_2 \dots r_p)} = y_1^{(r_1)} y_2^{(r_2)} \dots y_p^{(r_p)}$$

Supponendo in prima $m > p$, poniamo ancora

$$Z_{r_{p+1} \dots r_m} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_p}^{n} y^{(r_1 r_2 \dots r_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_p r_{p+1} \dots r_m}$$

$$P = \sum_{r_1}^{n} y_1^{(r_1)} X_{1|r_1} \cdot \sum_{r_2}^{n} y_2^{(r_2)} X_{2|r_2} \dots \sum_{r_p}^{n} y_p^{(r_p)} X_{p|r_p}$$

Risulterà

$$Z_{r_{p+1} r_{p+2} \dots r_m} = P X_{1|r_{m+1}} X_{2|r_{m+2}} \dots X_{m|r_m}$$

Per quanto abbiamo dimostrato, il fattore P è un invariante. Il sistema di ordine $m-p$ $Z_{r_{p+1} r_{p+2} \dots r_m}$ è quindi covariante.

Per semplicità abbiamo supposto che i due sistemi $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $y^{(r_1 r_2 \dots r_p)}$ fossero prodotti rispettivamente di $\underline{m}$ e di $\underline{p}$ sistemi semplici; ma il risultato a cui siamo giunti dipende, come è chiaro, soltanto dal loro modo di trasformarsi per una trasformazione qualunque di variabili indipen-

denti, cioè dalla loro natura rispettivamente covariante e controvariante. Qualunque siano i due sistemi $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ ed $y^{(r_1 r_2 \cdots r_p)}$, purchè il 1° sia covariante ed il 2° controvariante e purchè sia $m > p$, diremo che il sistema d'ordine $m-p$ $Z_{r_{p+1} r_{p+2} \cdots r_m}$ è composto di quei due sistemi. Abbiamo dunque dimostrato che

„ Un sistema composto di un sistema cova„riante di ordine $\underline{m}$ e di un sistema controva„riante di ordine p, se è $m > p$, è un sistema co„variante di ordine $m-p$. Supponendo $m = p$ e po„nendo

$$Z = \sum_{r_1 r_2 \cdots r_m} y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$$

si sarebbe dimostrato in modo analogo che Z è un invariante. Abbiamo dunque che

„ Il sistema di ordine $\underline{0}$ che si ha componen„do due sistemi dello stesso ordine di cui uno „sia covariante e l'altro controvariante è un in„variante."

In fine, se è $p > m$, chiameremo composto dei due sistemi $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $Y^{(r_1 r_2 \cdots r_p)}$ il sistema di ordine $p-m$

$$Z^{(r_{m+1} \cdots r_p)} = \sum_{r_1 r_2 \cdots r_m} Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m\, r_{m+1} \cdots r_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$$

Una dimostrazione analoga a quella data sopra ci permette poi di concludere che

„ Un sistema composto di un sistema cova-
„ riante di ordine m e di un sistema controva-
„ riante di ordine p, se è $p > m$, è un sistema
„ controvariante di ordine $p - m$. „

22. In seguito noi considereremo sempre i sis-
temi variabili, i cui elementi sono funzioni di
n variabili indipendenti $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ come as-
sociati ad una forma differenziale quadratica
colle stesse variabili, forma, che chiameremo
fondamentale.

Sia la forma fondamentale

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s \quad ,$$

ed $X_{p_1 p_2 \cdots p_m}$ un sistema covariante di ordine m.
Se questo sistema si compone col sistema con-
trovariante di ordine 2m, che ha gli elementi

$$a^{(p_1 q_1)}\; a^{(p_2 q_2)} \ldots a^{(p_m q_m)}$$

si ha il sistema di ordine m

$$X^{(q_1 q_2 \cdots q_m)} = \sum_{1\, p_1 p_2 \cdots p_m}^{n} a^{(p_1 q_1)} a^{(p_2 q_2)} \cdots a^{(p_m q_m)} X_{p_1 p_2 \cdots p_m}, \quad A)$$

che è controvariante (§ 21). Reciprocamente il si-
stema $X_{p_1 p_2 \cdots p_m}$ si può considerare come compo-
sto del sistema $X^{(q_1 q_2 \cdots q_m)}$ e del sistema covarian-
te di ordine 2m

$$a_{p_1 q_1} \cdot a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_m q_m} \;,$$

perchè dalle (A) si ricavano le

$$X_{p_1 p_2 \cdots p_m} = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_m} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_m q_m} X^{(q_1 q_2 \cdots q_m)} \qquad B)$$

Diremo che due sistemi dello stesso ordine, i cui elementi sono legati fra di loro dalle relazioni (A) e (B), per modo che se uno di essi è covariante l'altro è controvariante e viceversa sono reciproci rispetto alla forma fondamentale φ.

Esempio: Dalle identità

$$a^{(rs)} = \sum_{pq} a^{(pr)} a^{(qs)} a_{pq}$$

facilmente dimostrabili risulta che sono reciproci rispetto alla forma fondamentale il sistema dei suoi coefficienti e quello dei loro elementi reciproci.

Converremo che una stessa lettera rappresenti un sistema covariante ed il suo reciproco, secondo che gli indici si trovano in basso od in alto.

23. Sistemi derivati secondo la forma fondamentale da un sistema covariante.

Si abbia un sistema semplice covariante di elementi X_p. Per la sostituzione alle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ di un nuovo sistema di variabili indipendenti $y_1, y_2, \ldots y_n$ dovranno agli elementi X_r sostituirsi gli elementi

$$(X_r) = \sum_p X_p \, x_p^{(r)},$$

intendendosi nelle X_s sostituite alle $\underline{x}$ le loro espressioni per le $\underline{y}$. Da queste si traggono le

$$\frac{d(X_r)}{dy_s} = \sum_{pq} \frac{dX_p}{dx_q} x_p^{(r)} x_q^{(s)} + \sum_p X_p \, x_p^{(rs)}.$$

Se in queste si sostituiscono per le derivate seconde delle x le loro espressioni date dalle (7′) del Capitolo II e si fanno le posizioni

$$X_{pq} = \frac{dX_p}{dx_q} - \sum_{rs} a^{(rs)} a_{pq,r} \, X_s \qquad \alpha^{(0)})$$

si perviene alle relazioni

$$(X_{rs}) = \sum_{pq} X_{pq} \, x_p^{(r)} x_q^{(s)} \qquad 3)$$

Siano ora $X_{1|r}\ X_{2|r_2} \dots X_{m|r_m}$ m sistemi semplici covarianti e si consideri il sistema m^{uplo} covariante

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m} = X_{1|r_1} \cdot X_{2|r_2} \dots X_{m|r_m}$$

si avrà

$$\frac{dX_{r_1 r_2 \dots r_m}}{dx_{r_{m+1}}} = \sum_1^m {}_h \, X_{1|r_1} X_{2|r_2} \dots X_{h-1|r_{h-1}} X_{h+1|r_{h+1}} \dots X_{m|r_m} \frac{dX_{h|r_h}}{dx_{r_{m+1}}}$$

e ponendo

$$X_{h|r_h r_{m+1}} = \frac{dX_{h|r_h}}{dx_{r_{m+1}}} - \sum_{rs} a^{(rs)} a_{r_h r_{m+1}, r} \, X_{h|s}$$

$$X_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} = \frac{dX_{r_1 r_2 \dots r_m}}{dx_{r_{m+1}}} - \sum_{rs} a^{(rs)} \sum_1^m {}_h \, a_{r_h r_{m+1}, r} X_{r_1 \dots r_{h-1} s \, r_{h+1} \dots r_m} \qquad \alpha)$$

$$X_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} = \sum_1^m {}_h \, X_{1|r_1} X_{2|r_2} \dots X_{h-1|r_{h-1}} X_{h+1|r_{h+1}} \dots X_{m|r_m} X_{h|r_h r_{m+1}} \qquad 4)$$

Dalle (3) risulta che i sistemi doppi $X_{h|r_h r_{m+1}}$ sono covarianti e dalle (4) che è covariante anche il siste=

ma d'ordine $m+1$ $X_{r_1 r_2 \cdots r_{m+1}}$, poichè esso può riguardarsi come la somma di m sistemi, ciascuno dei quali è covariante essendo il prodotto di un sistema covariante doppio per $m-1$ sistemi covarianti semplici. Per una osservazione fatta altra volta questo risultato vale anche se il sistema $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ invece di essere il prodotto di m sistemi semplici è un sistema covariante qualunque di ordine m.

Dunque coll'aiuto della forma fondamentale φ siamo passati da un sistema covariante di ordine $\underline{m}$ ad un altro sistema covariante d'ordine $m+1$ e ciò mediante le operazioni (α) cioè mediante certe operazioni da eseguirsi contemporaneamente su tutti gli elementi del sistema proposto, ed il cui insieme potrà riguardarsi come una operazione da eseguirsi nel sistema stesso. Chiameremo questa operazione derivazione covariante secondo la forma fondamentale φ ed il sistema $X_{r_1 r_2 \cdots r_{m+1}}$ primo sistema derivato dal sistema $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ secondo la forma stessa.

Osserviamo qui che le (α) permettono di esprimere le derivate prime degli elementi di un sistema linearmente per gli elementi del sistema stesso e del 1° sistema derivato da esso cova-

rientemente secondo una forma fondamentale qualunque.

La operazione, per cui da una funzione $\mathfrak{U}$ delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ si passa al sistema semplice covariante, che ha per elementi le derivate prime di $\mathfrak{U}$ rispetto a queste variabili, può riguardarsi come una derivazione covariante secondo una forma fondamentale arbitraria. Per questa ragione è opportuno porre, come faremo in seguito,

$$\mathfrak{U}_r = \frac{d\mathfrak{U}}{dx_r}.$$

Notiamo ancora che secondo le $(\alpha^{(0)})$ gli elementi del sistema doppio derivato secondo la forma φ da un sistema semplice covariante X_p possono mettersi sotto la forma

$$X_{pq} = \frac{dX_p}{dx_q} - \sum_1^n {}_r\, a_{pq,r} X^{(r)}; \qquad \alpha')$$

ricordando che le $X^{(r)}$ sono gli elementi del sistema reciproco rispetto a φ del sistema proposto; che cioè si hanno le

$$X^{(r)} = \sum_1^n {}_s\, a^{(rs)} X_s.$$

Del pari dalle (α) pel sistema triplo derivato secondo φ da un sistema doppio covariante X_{rs} si hanno le formole

$$X_{pqt} = \frac{dX_{pq}}{dx_t} - \sum_{rs} a^{(rs)} (a_{pt,r} X_{sq} + a_{qt,r} X_{ps}). \qquad \alpha_1)$$

Se in queste poniamo

$$X_{pq} = a_{pq}$$

e ricordiamo le (6') del Capitolo 2° troviamo che i secondi membri sono identicamente nulli.

Abbiamo dunque che

„Il 1° sistema derivato secondo una forma „fondamentale dal sistema dei suoi coefficien„ti è identicamente nullo."

Come da un sistema covariante di ordine m per mezzo della derivazione covariante secondo una forma fondamentale si trae un primo sistema derivato covariante di ordine m+1, così da questo si può trarre un primo sistema derivato di ordine m+2, che si dirà 2° sistema derivato dal sistema proposto secondo la forma φ e così di seguito.

Dunque partendo da un sistema proposto covariante se ne possono trarre successivamente un 1°, 2°, ... p.simo sistema covariante derivato da esso secondo la forma φ, come da una funzione si traggono le derivate degli ordini successivi. Però il sistema p.simo derivato da un sistema di ordine m è di ordine m+p.

In particolare se nelle (α') poniamo $X_r = \frac{d\mathfrak{U}}{dx_r} = \mathfrak{U}_r$ ne risultano per gli elementi del 2° sistema cova-

riante derivato da una funzione $\mathcal{U}$ secondo la forma φ le espressioni

$$\mathcal{U}_{rs} = \frac{d^2\mathcal{U}}{dx_r dx_s} - \sum_p a_{rs,p}\, \mathcal{U}^{(p)},$$

dalle quali si traggono le

$$\mathcal{U}_{rs} = \mathcal{U}_{sr}$$

Ne concludiamo che:

„ Il 2° sistema covariante derivato da una funzione secondo una forma fondamentale qualunque è simmetrico."

Come si è fatto fin qui, così in seguito, designeremo con $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$ gli elementi del 1° sistema derivato secondo φ da un sistema covariante $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, cioè per passare dal simbolo, che rappresenta un elemento qualunque di un sistema covariante a quello analogo pel suo primo sistema derivato secondo la forma fondamentale basterà aggiungere ad esso un nuovo indice suscettibile di tutti i valori $1, 2, \ldots n$. Così $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ rappresenterà un elemento qualunque del 2° sistema derivato secondo la forma fondamentale dal sistema di elementi $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$.

I secondi membri delle (α) essendo lineari ed omogenei rispetto agli elementi del sistema $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ ed alle loro derivate ne risulta che:

„ Il sistema derivato secondo una forma fondamentale dalla somma di più sistemi è eguale alla somma di quelli derivati dai sistemi addendi."

Se un sistema covariante $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ è il prodotto di due sistemi

$$Y_{r_1 r_2 \cdot r_p}\ ,\ Z_{r_{p+1} \cdots r_m}\ ,$$

se cioè si hanno le identità

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \equiv Y_{r_1 r_2 \cdots r_p} Z_{r_{p+1} \cdots r_m}\ ,$$

dalle (α) si traggono senza difficoltà le

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} \equiv Y_{r_1 r_2 \cdots r_p} \cdot Z_{r_{p+1} \cdots r_m r_{m+1}} + Z_{r_{p+1} \cdots r_m} \cdot Y_{r_1 r_2 \cdots r_p r_{m+1}}\ .$$

Questo risultato si estende facilmente al caso del prodotto di un numero qualunque di sistemi covarianti e si giunge così al seguente teorema affatto analogo a quello, che vale per la derivazione dei prodotti di più funzioni.

„ Il sistema derivato secondo una forma fondamentale qualunque dal prodotto di p sistemi covarianti è eguale alla somma di p sistemi, ciascuno dei quali è il prodotto di $p-1$ dei fattori per il sistema derivato dal fattore omesso."

Si considerino ancora un sistema semplice covariante X_p ed i primi due sistemi derivati da esso secondo f X_{pq} ed X_{pqt}. Dalle (α_1) si

traggono le

$$X_{pqt} - X_{ptq} = \frac{dX_{pq}}{dx_t} - \frac{dX_{pt}}{dx_q} + \sum_1^n a^{(rs)}_{rs} \left(a_{pq,r} X_{st} - a_{pt,r} X_{sq}\right) ;$$

e dalle (α') le

$$\frac{dX_{pq}}{dx_t} = \frac{d^2X_p}{dx_q dx_t} - \sum_1^n{}_r X^{(r)} \frac{da_{pq,r}}{dx_t} - \sum_1^n{}_{rs} a^{(rs)} a_{pq,r} \frac{dX_s}{dx_t} - \sum_1^n{}_{rs} \frac{da^{(rs)}}{dx_t} a_{pq,r} X_s$$

ed essendo

$$X_s = \sum_1^n{}_u a_{us} X^{(u)}, \quad \sum_1^n{}_s a_{us} \frac{da^{(rs)}}{dx_t} = - \sum_1^n{}_s a^{(rs)} \frac{da_{us}}{dx_t}$$

$$\frac{dX_{pq}}{dx_t} = \frac{d^2X_p}{dx_q dx_t} - \sum_1^n{}_{rs} a^{(rs)} a_{pq,r} X_{st} - \sum_1^n{}_r X^{(r)} \left(\frac{da_{pq,r}}{dx_t} - \sum_1^n{}_{us} a^{(us)} a_{rt,s} a_{pq,u} \right)$$

Ricordando le (8) del Capitolo 2° si hanno dunque le formole

$$X_{pqt} - X_{ptq} = \sum_r a_{rp,qt} X^{(r)} \qquad \gamma_0)$$

Dimostriamo ora in generale che se $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ è un sistema m^{uplo} qualunque valgono le formole

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = \sum_1^n{}_{rs} a^{(rs)} \sum_1^m{}_\rho a_{r r_\rho, r_{m+1} r_{m+2}} X_{r_1 \dots r_{\rho-1} s r_{\rho+1} \dots r_m} \qquad \gamma)$$

Per le note considerazioni possiamo supporre che il sistema $X_{r_1 r_2 \dots r_{m-1} r_m}$ sia il prodotto di un sistema di ordine $m-1$ per un sistema semplice che cioè si abbia

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m} \equiv Y_{r_1 r_2 \dots r_{m-1}} Z_{r_m} \qquad 5)$$

Da queste con due successive derivazioni covarianti secondo φ si traggono le

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} r_{m+2}} \equiv Y_{r_1 r_2 \dots r_{m-1}} Z_{r_m r_{m+1} r_{m+2}} + Y_{r_1 r_2 \dots r_{m-1} r_{m+2}} Z_{r_m r_{m+1}}$$
$$+ Y_{r_1 r_2 \dots r_{m-1} r_{m+1}} Z_{r_m r_{m+2}} + Z_{r_m} Y_{r_1 r_2 \dots r_{m-1} r_{m+1} r_{m+2}} .$$

Se ora supponiamo la formola dimostrata per i siste-

mi di ordine $m-1$ (e lo è per quelli di 1° ordine) dalla procedente si ricavano le

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = Y_{r_1 r_2 \cdots r_{m-1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a^{(rs)} a_{r r_{m-1}, r_{m+1} r_{m+2}} Z_s$$

$$+ Z_{r_m} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a^{(rs)} \sum_{1}^{m-1}{}_{l}\, a_{r r_l\, r_{m+1}\, r_{m+2}} X_{r_1 r_2 \cdots r_{l-1} s r_{l+1} \cdots r_{m-1}}$$

le quali, per le (5), equivalgono alle formole da dimostrare.

24. Per un sistema controvariante semplice $Y^{(r)}$ valgono le formole di trasformazione

$$(Y^{(p)}) = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, Y^{(r)} y_p^{(r)},$$

da cui si traggono le

$$\frac{d(Y^{(p)})}{dy_t} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left(Y^{(r)} y_p^{(rs)} + y_p^{(r)} \frac{dY^{(r)}}{dx_s} \right) x_s^{(t)}.$$

Queste, poichè dalle (5) del Capitolo Secondo scendono le

$$\sum_{1}^{n}{}_{t} \left(a^{(qt)}\right) x_s^{(t)} = \sum_{1}^{n}{}_{t}\, a^{(st)} y_q^{(t)},$$

si possono altresì mettere sotto la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{t} \left(a^{(qt)}\right) \frac{d(Y^{(p)})}{dy_t} = \sum_{1}^{n}{}_{rst}\, a^{(st)} \left(Y^{(r)} y_p^{(rs)} + y_p^{(r)} \frac{dY^{(r)}}{dx_s} \right) y_q^{(t)} \qquad 6)$$

Se ora nelle (7') del Capitolo Secondo si scambiano le variabili $\underline{x}$ colle $\underline{y}$ e quindi i simboli tra parentesi coi corrispondenti senza parentesi, si hanno le formule

$$y_p^{(rs)} = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, a^{(hk)} a_{rs,k}\, y_p^{(h)} - \sum_{1}^{n}{}_{hki} \left(a^{(ip)}\right) \left(a_{hk,i}\right) y_h^{(r)} y_k^{(s)}.$$

Sostituendo poi nelle (6) per le $y_p^{(rs)}$ le espressioni date da queste e ponendo

$$y^{(rs)} = \sum_{1\,t}^{n} a^{(ts)} \left(\frac{d\,y^{(r)}}{dx_t} + \sum_{1\,hk}^{n} a^{(rk)}\, y^{(h)} a_{ht,k} \right) \qquad \beta')$$

si giunge alle

$$\left(y^{(pq)}\right) = \sum_{1\,rs}^{n} y^{(rs)}\, y_p^{(r)}\, y_q^{(s)} \qquad \gamma)$$

Siano ora $y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ gli elementi di un sistema controvariante qualunque di ordine $\underline{m}$ e si facciano le posizioni

$$y^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})} = \sum_{1\,r}^{n} a^{(r\,r_{m+1})} \left(\frac{d\,y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}}{dx_r} + \sum_{1\,pq}^{n} a_{rp,q} \sum_{1\,q}^{n} a^{(q r_h)}\, y^{(r_1 \cdots r_{h-1} p\, r_{h+1} \cdots r_m)} \right) \qquad B)$$

Con dimostrazione perfettamente analoga a quella del § 23 si dimostra che il sistema di elementi $y^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$ è controvariante.

Per mezzo della forma fondamentale φ si può dunque passare da un sistema controvariante di ordine $\underline{m}$ ad un nuovo sistema controvariante di ordine $m+1$. A ciò servono le operazioni (B), che nel loro insieme possono riguardarsi costituire un'unica operazione da eseguire sul sistema di elementi $y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$.

Chiameremo questa operazione derivazione controvariante secondo la forma fondamentale φ; ed il sistema di elementi $y^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$ derivato secondo la forma stessa da quello di elementi $y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$.

Analogamente a quanto si è detto pei sistemi covarianti, anche pei sistemi controvarianti si hanno i sistemi derivati dei successivi ordini. Converremo poi che per passare dai simboli, che rappresentano gli elementi di un sistema controvariante a quelli, che rappresentano gli elementi del suo sistema derivato, basti aggiungere ad essi, come si è fatto sopra, un nuovo indice suscettibile di tutti i valori da $\underline{1}$ fino ad $\underline{n}$.

Anche qui osserviamo che le (B) permettono di esprimere linearmente le derivate prime degli elementi di un sistema controvariante per gli elementi del 1° sistema derivato da esso secondo una forma fondamentale qualunque.

Il sistema semplice controvariante derivato secondo una forma fondamentale φ da un sistema di ordine $\underline{0}$; cioè da una funzione $\underline{U}$, come risulta dalla (B), ha gli elementi

$$U^{(r)} = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, a^{(rs)} U_{s},$$

cioè è il sistema reciproco rispetto a φ al primo sistema covariante derivato da U secondo φ. — Dimostreremo fra breve un teorema, che com-

prende questo come caso particolare, e che ci permetterà di dedurre da ogni teorema relativo a sistemi covarianti o controvarianti un sistema, per così dire reciproco. Premettiamo però la dimostrazione del teorema seguente.

„ Se un sistema covariante di elementi
„ $Z_{r_1 r_2 \dots r_m}$ è composto di un sistema controvarian-
„ te di elementi $Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ e di uno covariante di e-
„ lementi $X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m}$, se cioè valgono le

$$„ \qquad Z_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m} ,$$

„ valgono pure le

$$„ \quad Z_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$$

$$„ \qquad + \sum_{1}^{n}{}_{q s_1 s_2 \dots s_p} a_{q r_{m+1}} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p q)} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m} .$$

Infatti dalle (α) si traggono le

$$Z_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} \frac{d X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m}}{d x_{r_{m+1}}} +$$

$$+ \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m} \frac{d Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)}}{d x_{r_{m+1}}}$$

$$- \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{(rs)} \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} \sum_{1}^{m}{}_{h} a_{r_h r_{m+1}, r} X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 \dots r_{h-1} s r_{h+1} \dots r_m} .$$

Per dimostrare il teorema proposto basta ora sostituire nei secondi membri di queste formole alle derivate prime degli elementi $X_{s_1 s_2 \dots s_p r_1 r_2 \dots r_m}$ ed $Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ le loro espressioni per gli elementi stessi e per quelli dei sistemi derivati da essi secon-

do φ.

Se ricordiamo che un sistema covariante di elementi $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ può essere riguardato come composto del suo reciproco rispetto alla forma fondamentale e del sistema di ordine 2m di elementi

$$a_{r_1 s_1} \cdot a_{r_2 s_2} \dots a_{r_m s_m}$$

ed osserviamo che, come risulta dai teoremi del § 23, il sistema derivato da questo secondo φ è identicamente nullo, dal teorema precedente si ricava la formola

$$X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_m s_{m+1}} a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_{m+1} s_{m+1}} X^{(s_1 s_2 \dots s_m s_{m+1})}$$

Si giunge così al teorema generale accennato sopra, e che si enuncia come segue:

„ I primi sistemi derivati secondo una stessa
„ forma fondamentale da due sistemi reciproci
„ rispetto a questa sono essi pure reciproci; e quin-
„ di sono pure reciproci i loro sistemi derivati di
„ uno stesso ordine qualunque."

Ne segue il corollario

„ Se Z è un invariante composto di due siste-
„ mi dello stesso ordine, di cui uno sia covarian-
„ te e l'altro controvariante, se cioè si ha

„ $$Z = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_p} Y^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{s_1 s_2 \dots s_p}$$

„ valgono le formole

„ $Z_r = \sum_{1\, s_1 s_2 \ldots s_p}^{n} \left(Y^{(s_1 s_2 \ldots s_p)} X_{s_1 s_2 \ldots s_p r} + X^{(s_1 s_2 \ldots s_p)} Y_{s_1 s_2 \ldots s_p r} \right)$ „

Infatti dai teoremi dimostrati sopra seguono, per $m = 0$, le formole

$$Z_r = \sum_{1\, s_1 s_2 \ldots s_p}^{n} Y^{(s_1 s_2 \ldots s_p)} X_{s_1 s_2 \ldots s_p r} + \sum_{1\, q s_1 s_2 \ldots s_p}^{n} a_{qr} Y^{(s_1 s_2 \ldots s_p q)} X_{s_1 s_2 \ldots s_p} \quad 8)$$

$$Y^{(s_1 s_2 \ldots s_p q)} = \sum_{1\, r_1 r_2 \ldots r_p r_{p+1}}^{n} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_p s_p)} a^{(r_{p+1} q)} Y_{r_1 r_2 \ldots r_p r_{p+1}},$$

e quindi le

$$\sum_{1\, q}^{n} a_{qr} Y^{(s_1 s_2 \ldots s_p q)} = \sum_{1\, r_1 r_2 \ldots r_p}^{n} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_p s_p)} Y_{r_1 r_2 \ldots r_p r},$$

e da queste combinate colle (8) scendono le formole, che si tratta di dimostrare.

Come si disse, il teorema generale dimostrato sopra permette di dedurre da ogni teorema relativo ai sistemi covarianti e controvarianti un teorema reciproco, il cui enunciato si ha scambiando fra loro queste parole e nelle formole i simboli corrispondenti. Così ai primi due teoremi del § 23 sono reciproci i teoremi seguenti:

„ Il primo sistema derivato secondo una qualunque forma fondamentale dal sistema degli elementi reciproci dei suoi coefficienti è identicamente nullo. „

„ Il secondo sistema controvariante derivato da una funzione secondo una forma fondamen-

tale qualunque è simmetrico."

Vigono pure i teoremi reciproci di quelli del § 23 relativi ai sistemi derivati dalle somme e dai prodotti di più sistemi covarianti; teoremi di cui è facile stabilire gli enunciati, che perciò qui si omettono.

In fine alle formole (γ) del § 23 corrispondono le reciproche

$$\left.\begin{aligned} & X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2})} - X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1})} \\ & = \sum_1^n {}_{rs} \sum_1^m {}_h a^{(r r_h, r_{m+1} r_{m+2})} X^{(r_1 \cdots r_{h-1} s r_{h+1} \cdots r_m)} \end{aligned}\right\} \gamma);$$

indicandosi con $a^{(rs,tu)}$ gli elementi del sistema reciproco a quello, che ha per elementi i simboli di Riemann.

25. Diamo subito una importante applicazione dei metodi esposti in questo Capitolo.

Si supponga che la forma fondamentale

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

sia positiva almeno nel campo, a cui si considera ristretta la variabilità delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots x_n$, e queste si riguardino come funzioni di una sola variabile indipendente t. Posto

$$\frac{dx_r}{dt} = x'_r \qquad 9)$$
$$(r = 1, 2, \ldots n)$$

risulterà

$$\varphi = dt^2 \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, x'_r\, x'_s\,, \qquad 10)$$

e indicando con t_0 una costante e posto ancora

$$s = \int_{t_0}^{t} dt \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s}\,, \qquad 11)$$

sarà

$$s' = \frac{ds}{dt} \qquad 12)$$

$$s'^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s\,. \qquad 13)$$

Posto in fine

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{ds}\,, \qquad (r = 1, 2, \cdots n) \qquad 14)$$

avremo le

$$x'_r = s' \lambda^{(r)} \qquad 15)$$

e per le (13)

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} = \sum_{r} \lambda^{(r)} \lambda_r = 1 \qquad 16)$$

Ciò premesso supponiamo date alle x_r delle variazioni δx_r, e dalla (13) avremo

$$s' \delta s' = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r \delta x'_s + \sum_{1}^{n}{}_{rst} a_{rs,t} x'_r x'_s \delta x_t\,,$$

ovvero per le (15), ricordando che il sistema $\lambda^{(r)}$ è controvariante ed indicando con λ_r gli elementi del sistema reciproco rispetto a φ

$$\delta s' = \sum_{1}^{n}{}_{r} \lambda_r \delta x'_r + s' \sum_{1}^{n}{}_{r} \delta x_r \sum_{1}^{n}{}_{st} a_{rt,s} \lambda^{(s)} \lambda^{(t)} \qquad 17)$$

Riguardando $\underline{t}$ come invariabile ed osservando che dalle (11) e (13) risulta

$$s = \int_{t_0}^{t} s' dt\,,$$

avremo

$$\delta s = \int_{t_0}^{t} \delta s' \, dt\,;$$

cioè per la (17) essendo

$$\int_{t_0}^{t} \lambda_r \delta x'_r \, dt = -\int_{t_0}^{t} \delta x_r \frac{d\lambda_r}{dt} dt = -\int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{}{}_{p} \frac{d\lambda_r}{dx_p} \lambda^{(p)} \delta x_r \, ds\,,$$

$$\delta s = -\sum_{1}^{n}{}_{r} \int_{t_0}^{t} \delta x_r \sum_{1}^{n}{}_{p} \lambda^{(p)} \left(\frac{d\lambda_r}{dx_p} - \sum_{1}^{}{}_{ps} a_{rp,s} \lambda^{(s)} \right) ds \; ;$$

e in fine per le (α')

$$\delta s = -\sum_{1}^{n}{}_{r} \int_{t_0}^{t} \delta x_r \sum_{1}^{n}{}_{p} \lambda^{(p)} \lambda_{rp} \cdot ds \, .$$

In questa formola leggiamo il seguente teorema:

„ Se $\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ è una forma differenzia-
„ le quadratica positiva ed $x_1\, x_2 \ldots x_n$ sono funzioni
„ di una variabile indipendente t, le condizioni
„ necessarie e sufficienti perchè si annulli iden-
„ ticamente la variazione prima dell'integrale

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt}}\, dt \qquad ,$$

„ sono date dalle equazioni

$$\sum_{1}^{n}{}_{p} \lambda^{(p)} \lambda_{rp} = 0 \; ,$$
$$(r = 1, 2, \ldots n)$$

„ essendo

$$\lambda^{(p)} = \frac{dx_p}{ds}, \; \lambda_p = \sum_{1}^{n}{}_{r} a_{rp} \lambda^{(r)}$$
$$(p = 1, 2, \ldots n)$$

„ e denotandosi con λ_{rp} gli elementi del 1° sistema
„ derivato secondo φ dal sistema di elementi λ_r. „

Capitolo Quarto

Della classificazione delle forme differenziali quadratiche positive.

Forme di classe o, loro proprietà caratteristica, e metodi per ridurle alla forma canonica. Forma di 1ª classe. — Teorema generale per la classificazione delle forme differenziali quadratiche positive.

---

26. Sia
$$\varphi = \sum_{1\,rs}^{n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$
una forma differenziale quadratica positiva e proponiamoci di riconoscere se è possibile che una forma del tipo
$$\Psi = \sum_{1\,k}^{m} dy_k^2$$
si cambi identicamente nella φ per la sostituzione ad $y_1, y_2 \dots y_m$ di funzioni di $x_1\, x_2 \dots x_n$ opportunamente scelte. Si avranno allora le identità

$$a_{rs} = \sum_{1\,k}^{m} y_{k|r}\, y_{k|s}, \qquad 1)$$
$$(r, s = 1, 2 \dots n)$$

posto al solito
$$y_{k|r} = \frac{dy_k}{dx_r},$$
cioè il discriminante a di φ sarà il quadrato della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dy_1}{dx_1} & \frac{dy_2}{dx_1} \cdots & \frac{dy_m}{dx_1} \\ \frac{dy_1}{dx_2} & \frac{dy_2}{dx_2} \cdots & \frac{dy_m}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dy_1}{dx_n} & \frac{dy_2}{dx_n} \cdots & \frac{dy_m}{dx_m} \end{matrix} \right\| \qquad M)$$

Dalle (1) risulta che $\underline{a}$ è il quadrato della matrice (M); e quindi che questa non è identicamente nulla, poichè si suppone $a > 0$. Dovrà dunque essere $m \geq n$; e poichè, considerando come incognite $y_1, y_2, \dots y_m$, le (1) rappresentano un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni con m funzioni incognite, sarà sempre possibile risolvere il problema, di cui si tratta per m al più eguale ad $\frac{n(n+1)}{2}$. Se $\underline{m}$ è il minimo numero, per cui sia possibile rendere identica la forma ψ alla φ nel modo detto sopra, cioè soddisfare alle (1), si dirà che la forma $\underline{\varphi}$ è di classe $\underline{m-n}$. Una forma differenziale quadratica positiva ad n variabili è dunque al meno di classe $\underline{o}$ ed al più di classe $\frac{n(n-1)}{2}$.

Indicando con $y_{k|rs}$ gli elementi del 2° sistema covariante derivato secondo φ dalla funzione y_k, dalle (1), ricordando i teoremi del Capitolo sesto, si traggono le

$$\sum_1^m {}_k\, y_{k|r}\, y_{k|st} + \sum_1^m {}_k\, y_{k|s}\, y_{k|rt} = 0 \quad ,$$

le quali, come è facile riconoscere considerando anche insieme alla equazione scritta quelle che se ne ottengono scambiando $\underline{s}$ successivamente con $\underline{r}$ e con $\underline{t}$ equivalgono alle

$$\sum_1^m {}_k\, y_{k|r}\, y_{k|st} = 0 \qquad 2)$$
$$(r, s, t = 1, 2 \dots n)$$

27. Le forme di classe $\underline{o}$ sono quelle forme φ le quali per una opportuna scelta delle variabili indipendenti possono ridursi alla espressione

$$(\varphi) = \sum_{1}^{n} {}_k \, dy_k^2 .$$

Come risulta dalle espressioni dei simboli di Riemann date nel Capitolo Secondo, il sistema, che ha per elementi questi simboli, è identicamente nullo per la espressione (φ) e quindi per qualunque espressione di una forma differenziale quadratica di classe $\underline{o}$. Dimostreremo che reciprocamente:

„ Una forma differenziale quadratica positi-
„ va è di classe $\underline{o}$, se è identicamente nullo il si-
„ stema, che ha per elementi i simboli di Rie-
„ mann relativi alla forma stessa."

Per dimostrare ciò osserviamo anzi tutto che, se una forma φ è di classe $\underline{o}$, essendo allora $m=n$, la matrice $\underline{M}$ del § 1 rappresenta un determinante di ordine $\underline{n}$ diverso da $\underline{o}$. La equazione (2), che si ottengono per derivazione dalle (1) equivalgono quindi alle

$$y_{k|st} = 0 . \qquad 2,)$$

Come risulta dalle (α) del Capitolo Terzo, queste equazioni permettono di esprimere tutte le derivate seconde di $y_1, y_2, \dots y_n$ per le derivate prime e

per le variabili indipendenti. Di più colla derivazione delle (2,) non si ottengono nuove equazioni di 1° ordine, dacchè le (2,) derivate covariantemente secondo q dànno le

$$y_{k|stu} = 0$$

e queste, nella ipotesi da noi fatte che i simboli di Riemann siano identicamente nulli, soddisfanno identicamente alle (8) del Capitolo Terzo. Le (1)(per $m = n$) e le (2) costituiscono dunque un sistema completo, il cui sistema integrale generale, come risulta dal Capitolo Primo, contiene $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ costanti arbitrarie non additive ed n costanti additive. Le prime rappresentano i coefficienti arbitrarî in numero eguale contenuti in una sostituzione ortogonale relativa ad n variabili. Infatti si supponga che $y_1, y_2 \dots y_n$ costituiscano un sistema integrale particolare del sistema di equazioni (1,2) e si pongano le

$$z_h = \sum_1^n{}_k c_{hk} y_k , \qquad 3)$$
$$(h = 1, 2, \dots n)$$

le c_{hk} essendo costanti legate fra loro dalle relazioni

$$\sum_1^n{}_h c_{hi} c_{hj} = \varepsilon_{ij} \qquad 4)$$
$$(i, j = 1, 2, \dots n) ,$$

e denotando coi simboli ε_{ij} lo zero o l'unità, secon-

do che gli indici $\underline{i}$ e $\underline{j}$ sono distinti od identici. —
Dalle (3) si traggono successivamente, mediante derivazione covariante secondo $\underline{\varphi}$ le

$$z_{h|r} = \sum_{1}^{n} {}_{k} \, c_{hk} \, y_{k|r} \qquad 5)$$

$$(h, r = 1, 2 \dots n)$$

e, tenendo conto delle (2,) le

$$z_{h|rs} = 0$$

Le (5), ricordando le (1) e le (4) danno poi le

$$\sum_{1}^{n} {}_{h} \, z_{h|r} \, z_{h|s} = a_{rs} .$$

Anche le z_h soddisfanno dunque alle (1) ed alle (2).
Quanto si è ora dimostrato risulta anche semplicemente dall'osservare che la forma (φ) si cambia in sè stessa per una sostituzione ortogonale qualunque a coefficienti costanti eseguita sulle $\underline{y}$ e soltanto per una tale sostituzione.

28. Dal § precedente risulta che per ridurre una forma φ di classe o alla espressione (φ), che chiameremo canonica, è necessario e basta determinare un sistema integrale particolare del sistema completo (1, 2); dall'integrale particolare, per quanto è stato ivi dimostrato è poi facile passare all'integrale generale.

Lo stesso intento però si raggiunge anche con altro metodo, che ora verrà esposto, e che richiede la determinazione successiva di n integrali par-

ticolari di altrettanti sistemi completi di 2° ordine rispettivamente ad n, $n-1$, $n-2$, ... 1 variabili indipendenti, ciascuno dei quali contiene una sola funzione incognita.

Indicando con y una funzione incognita si consideri dapprima il sistema

$$\left.\begin{aligned} y_{rs} &= 0 \\ \sum_r y^{(r)} y_r &= 1 \end{aligned}\right\} \alpha)$$

L'ultima equazione derivata applicando un teorema del § 24 conduce alle

$$\sum_r y^{(r)} y_{rs} = 0 ,$$

che sono conseguenze delle equazioni del sistema proposto (α). Le prime equazioni di questo sistema derivate dànno le $y_{rst} = 0$, le quali, nella ipotesi nostra, soddisfanno alle (γ) del Capitolo Terzo. Il sistema (α) è dunque completo e il suo sistema integrale generale contiene $n-1$ costanti arbitrarie non additive ed una additiva.

Sia y un integrale particolare di questo sistema e si consideri la forma

$$\Psi = \varphi - dy^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs} b_{rs}\, dx_r\, dx_s , \qquad 6)$$

essendo

$$b_{rs} = a_{rs} - y_r y_s \qquad 7)$$
$$(r, s = 1, 2 \ldots n)$$

Se si indica con b il discriminante di questa forma si ha

$$b = a\,(1 - \sum_r y^{(r)} y_r)$$

e quindi per l'ultima delle (α)

$$b = 0$$

Se supponessimo nulli assieme a b tutti i suoi minori di ordine $n-1$, come si sa dalla teoria delle quadratiche, la ψ sarebbe la trasformata di una forma con $n-2$ variabili al più. La φ, come risulta dalla (6), potrebbe quindi ridursi a contenere meno di n variabili indipendenti; il che è assurdo, poichè noi supponiamo il suo discriminante diverso da 0.

Da quanto si è ora dimostrato segue che il sistema di equazioni differenziali

$$\sum_1^n {}_s\, b_{rs}\, dx_s = 0 \qquad (r = 1, 2 \ldots n) \qquad 8)$$

risulta di $n-1$ equazioni indipendenti. Il suo sistema integrale generale è dunque della forma

$$f_r\,(x_1\, x_2 \cdots x_n) = u_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1), \qquad 9)$$

$f_1, f_2, \cdots f_{n-1}$ essendo funzioni indipendenti di x_1, $x_2, \ldots x_n$ ed $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ costanti arbitrarie. Le (9) saranno perciò risolubili rispetto ad $n-1$ variabili, per esempio rispetto ad $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, e risolute daranno

$$x_r = \mathfrak{F}_r\,(u_1\, u_2 \ldots u_{n-1}\; u_n), \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1) \qquad 10)$$

essendosi posto

$$x_n = u_n \qquad 10)$$

Facendo ancora le posizioni

$$\beta_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, b_{pq} \frac{dx_p}{du_r} \frac{dx_q}{du_s} \qquad 11),$$

$$(r, s = 1, 2, \dots n)$$

per le (10) la ψ assumerà la espressione

$$(\psi) = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \beta_{rs}\, du_r\, du_s$$

Si osservi ora che dalle (11), tenendo altresì conto delle (8), si traggono le

$$\beta_{rn} = 0, \; (r = 1, 2, \dots n) \qquad 12)$$

così che la (ψ) contiene effettivamente soltanto i differenziali delle $n-1$ variabili $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$. Di più dalle (6) e (7) si traggono facilmente le

$$dx_r = y^{(r)} dy \qquad 13)$$

$$(r = 1, 2, \dots n)$$

Se poi si indicano con $b_{rs,t}$ i simboli di Riemann relativi alla forma ψ, e si hanno presenti le (α), che per le (α°) del Capitolo Terzo equivalgono alle

$$\frac{d^2 y}{dx_r\, dx_s} = \sum_{1}^{n}{}_{p}\, a_{rs,p}\, y^{(p)};$$

dalle (7) si traggono le

$$b_{rs,t} = a_{rs,t} - y_t \sum_{1}^{n}{}_{p}\, a_{rs,p}\, y^{(p)} \;;$$

e da queste e dalle (9) le

$$\sum_{1t}^{n} b_{rs,t}\, dx_t = 0 \qquad 14)$$
$$(r, s = 1, 2, \dots n)$$

Se ora si derivano rispetto ad una u_s le (8) divise per du_n si ottengono le

$$\sum_{1q}^{n} b_{pq} \frac{d^2 x_q}{du_s\, du_n} = \sum_{1qr}^{n} \frac{d b_{pr}}{dx_q} \frac{dx_q}{du_s} \frac{dx_r}{du_n}$$

In fine, tenendo conto di queste e delle (14) e derivando le (11) rispetto ad u_n si giunge alle

$$\frac{d\beta_{rs}}{du_n} = 0$$
$$(r, s = 1, 2, \dots n) .$$

Da queste e dalle (12) segue che, mediante la trasformazione (10), la forma Ψ assume la espressione

$$\Psi = \sum_{1rs}^{n-1} \beta_{rs}\, du_r\, du_s ,$$

le β_{rs} essendo funzioni soltanto di $v_1, u_2 \dots u_{n-1}$. Dalla (2) abbiamo poi

$$\varphi = dy^2 + \Psi \qquad 15)$$

Se ora calcoliamo i simboli di Riemann $a_{rs,tu}$ per la forma φ ridotta a questa espressione e indichiamo con $\beta_{rs,tu}$ quelli della Ψ, è facile dimostrare le formole

$$a_{rs,tu} = \beta_{rs,tu}$$
$$(r, s, t, u = 1, 2, \dots n-1) .$$

Poichè tutte le $a_{rs,tu}$ si suppongono identicamente nulle, saranno dunque tali anche i simboli di

Riemann relativi alla forma Ψ. Come siamo giunti alla (15) possiamo quindi dimostrare che la Ψ può ridursi alla forma

$$\Psi = dy_1^2 + \chi \quad ,$$

χ essendo una forma ad $n-2$ variabili, i cui simboli di Riemann sono tutti nulli; e la effettiva riduzione della Ψ a questa forma esigerà la determinazione di un integrale particolare di un sistema completo della stessa forma del sistema (α), ma con una variabile indipendente di meno. Analogamente operando sopra χ e così di seguito la $\underline{\varphi}$ risulterà in fine ridotta alla forma canonica.

29. Si supponga in secondo luogo $m = n+1$. Poichè la matrice ($\mathcal{M}$) non è identicamente nulla, il sistema di equazioni algebriche

$$\sum_1^{n+1}{}_k \; y_{k|r} \, z_k = 0 \qquad 16)$$
$$(r = 1, 2, \dots n)$$

ammetterà una sola soluzione indipendente, per la quale, indicando con $\mathcal{M}_k$ il minore, che si ottiene da $\underline{\mathcal{M}}$ sopprimendone la colonna k^{sima}, possiamo assumere

$$z_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{a}} \mathcal{M}_k \qquad 17)$$
$$(k = 1, 2, \dots n+1)$$

Poichè, come ci dicono le (2), le $y_{k|rs}$ soddisfanno

al sistema (16) e di più (§ 23) sono simmetriche rispetto agli indici $\underline{r}$ ed $\underline{s}$, potremo fare le posizioni

$$y_{k|rs} = z_k \, b_{rs} \qquad 2_2),$$

$$(k = 1, 2, \dots n+1, \; r, s = 1, 2, \dots n),$$

essendo $b_{rs} = b_{sr}$. È facile riconoscere che $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ sono invarianti; e poichè le $y_{k|rs}$, k considerandosi come fisso, sono gli elementi di un sistema doppio covariante possiamo dalle (2_2) e dalle cose dette concludere che

„ Gli elementi b_{rs} definiti dalle (2_2) costituiscono un sistema doppio simmetrico covariante."

Osserviamo ancora che, essendo $a = \sum_1^{n+1} {}_k \mathcal{N}_k^2$, dalle (17) risulta la

$$\sum_1^{n+1} {}_k \, z_k^2 = 1 \quad ; \qquad 18)$$

Dalla (18) e dalle (2_2) si traggono le

$$b_{rs} = \sum_1^{n+1} {}_k \, z_k \, y_{k|rs} \quad ; \qquad 19)$$

e se si derivano covariantemente secondo φ la (18) stessa e le (16) tenendo conto delle (19) si giunge alle

$$\sum_1^{n} {}_k \, z_k \; z_{k|s} = 0$$

$$\sum_1^{n+1} {}_k \, y_{k|r} \; z_{k|s} = -b_{rs}$$

$$(r, s = 1, 2, \dots n);$$

le quali risolute rispetto alle $z_{k|s}$ dànno le

$$z_{k|s} = -\sum_1^{n} {}_r \, b_{rs} \, y_k^{(r)} \qquad 20)$$

$$(k = 1, 2, \dots n+1; \; s = 1, 2, \dots n).$$

Tenendo conto di queste e derivando ancora covariantemente secondo $\underline{t}$ le (2_2) si ottengono le formole

$$y_{k|rst} = z_k\, b_{rst} - b_{rs} \sum_1^n{}_q\, b_{qt}\, y_k^{(q)}$$

$$(k = 1, 2, \dots n+1;\ r, s, t = 1, 2, \dots n)$$

e da queste le

$$y_{k|rst} - y_{k|rts} = z_k\left(b_{rst} - b_{rts}\right) + \sum_1^n{}_q\, y_k^{(q)}\left(b_{rt}\, b_{qs} - b_{rs}\, b_{qt}\right).$$

$$(k = 1, 2, \dots n+1;\ r, s, t = 1, 2, \dots n)$$

Confrontiamo queste colle

$$y_{k|rst} - y_{k|rts} = \sum_1^n{}_p\, a_{pr,st}\, y_k^{(p)}, \qquad 21)$$

le quali non sono che le (γ_0) del § 23, ed abbiamo le

$$z_k\left(b_{rst} - b_{rts}\right) = \sum_1^n{}_q\, y_k^{(q)}\left(a_{qr,st} + b_{qt}\, b_{rs} - b_{qs}\, b_{rt}\right)$$

le quali, per le (16) e (18) equivalgono alle

$$b_{qs}\, b_{rt} - b_{qt}\, b_{rs} = a_{qr,st} \qquad G)$$

$$b_{rst} = b_{rts} \qquad C)$$

Se si considera il sistema, che comprende le (1), (fattori $m = n+1$) e le (2_2), nelle quali per le z_k si intendano sostituite le espressioni date dalle (17), dai calcoli fatti sopra risulta ancora, che un tale sistema simultaneo a derivate parziali di 2° ordine e risolubile rispetto alle derivate seconde delle funzioni incognite $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$, è completo, se sono soddisfatte le equazioni (G) e (C). Possiamo dunque concludere che

„ Perchè una forma differenziale quadratica

„positiva e non di classe 0 sia di 1ª classe è ne=
„cessario e basta che esista un sistema doppio
„simmetrico tale che, indicando con b_{rs} i suoi
„elementi,

„1° I minori di second'ordine ottenuti dal de=
„terminante

$$(b_{11}\ b_{22} \dots b_{nn}) \ ,$$

„sopprimendo le righe di indici q ed r e le co=
„lonne di indici s e t siano eguali ai simbo=
„li di Riemann $a_{qr,st}$ della forma proposta."

„2° Che il 1° sistema derivato covariantemen=
„te secondo φ dal sistema di elementi b_{rs} sia sim=
„metrico."

— Verificate queste condizioni il sistema in=
tegrale generale del sistema considerato so=
pra contiene $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie non
additive ed $n+1$ costanti additive. Le prime
sono quelle contenute in una sostituzione orto=
gonale arbitraria ad $n+1$ variabili, come si
può dimostrare anche in questo caso analo=
gamente a quanto si è fatto nel § 27 per le for=
me di classe 0.

Se si fanno le posizioni

$$\beta_{r,st} = b_{rst} - b_{rts} \ ,$$

è facile riconoscere che valgono le identità

$$\beta_{r,st} + \beta_{r,ts} \equiv 0$$

$$\beta_{r,st} + \beta_{t,rs} + \beta_{s,tr} \equiv 0 \,,$$

delle quali le ultime sono distinte dalle prime sol, tanto per r s e t tutti distinti fra di loro. Ne segue che le equazioni C) distinte fra di loro si riducono ad $\frac{(n+1)n(n-1)}{3}$.

Vedremo a suo tempo come, nei casi, che ci interessano, la effettiva determinazione delle funzioni $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ possa ottenersi con metodo più semplice di quello, che risulta dalle considerazioni svolte in questo paragrafo.

30. In generale per $m > n$ il sistema di equazioni algebriche

$$\sum_1^m {}_k \; y_{k|r} \, z_k = 0 \qquad 22)$$
$$(r = 1, 2, \ldots n)$$

ammette $m - n$ e non più soluzioni indipendenti. Rappresentiamo con

$$z_k = z_{ki}$$
$$(k = 1, 2, \ldots m; \; i = 1, 2, \ldots m-n)$$

un sistema di soluzioni indipendenti del detto sistema scelte come è sempre possibile, in modo che soddisfacciano alle relazioni

$$\sum_1^m {}_k \; z_{ki} \, z_{kj} = \varepsilon_{ij} \,, \qquad A)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots m-n)$$

i simboli ε_{ij} avendo lo stesso significato che nel pa-

ragrafo 27.

Poichè, come ci dicono le (2), le $y_{k|rs}$ soddisfanno al sistema (22), varranno per esse delle espressioni della forma

$$y_{k|rs} = \sum_{1}^{m-n}{}_i \, z_{ki} \, b_{i|rs} \,, \qquad 2_3)$$

dalle quali e dalle (A) si traggono le

$$b_{i|rs} = \sum_{1}^{m}{}_k \, z_{ki} \, y_{k|rs} \qquad 23)$$

Le z_{ki} sono invarianti, poichè tale è il sistema di equazioni (22), e perciò dalle (23) risulta che, considerando i come fisso, le $b_{i|rs}$ sono elementi di un sistema doppio simmetrico covariante.

Le identità

$$\sum_{1}^{m}{}_k \, y_{k|r} \, z_{ki} = 0 \,, \qquad B)$$

$$(r = 1,2,\dots n \,, \; i = 1,2,\dots n\text{-}m)$$

derivate covariantemente secondo φ, se si tien conto anche delle (23) dànno le

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{1}^{m}{}_k \, y_{k|r} \, z_{ki|s} = -b_{i|rs} \\ (r, s = 1,2,\dots n, \; i = 1,2,\dots m-n)\end{array}\right\} \; 24)$$

Facciamo le posizioni

$$\sum_{1}^{m}{}_k \, z_{ki} \, z_{kj|s} = \mu_{ij|s} \qquad 25)$$

e queste e le (24) risolute rispetto alle $z_{ki|r}$ daranno le

$$z_{ki|r} = -\sum_{1}^{n}{}_p \, b_{i|pr} \, y_k^{(p)} + \sum_{1}^{m-n}{}_j \, z_{kj} \,, \, \mu_{ji|r} \qquad C)$$

Come risulta dalle (25) le $\mu_{ij|s}$, riguardando gli indici $\underline{i}$ e j come fissi, costituiscono un sistema semplice covariante: e come si dimostra derivando le (A) i sistemi di elementi $\mu_{ij|s}$ soddisfanno alle relazioni

$$\mu_{ij|s} + \mu_{ji|s} = 0 \qquad 26)$$

e quindi in particolare alle

$$\mu_{ii|s} = 0 .$$

Se ora alle (2_3) si applica la derivazione covariante secondo la forma $\underline{\varphi}$ si ottengono le

$$y_{k|rst} = \sum_1^{m-n}{}_i z_{ki} \left(b_{i|rst} - \sum_1^{m-n}{}_j b_{j|rs} \mu_{ji|t} \right)$$

$$- \sum_1^{m-n}{}_i b_{i|rs} \sum_1^{n}{}_p b_{i|pt} \, y_k^{(p)}$$

e quindi le

$$y_{k|rst} - y_{k|rts} = \sum_1^{m-n}{}_i z_{ki} \left\{ b_{i|rst} - b_{i|rts} + \sum_1^{m-n}{}_j (b_{j|rt}\mu_{ji|s} - b_{j|rs}\mu_{ji|t} \right\}$$

$$+ \sum_1^{n}{}_p y_k^{(p)} (b_{i|rt} \, b_{i|ps} - b_{i|rs} \, b_{i|pt})$$

$$(k = 1, 2, \dots m ; \; r, s, t = 1, 2, \dots n)$$

Confrontando queste colle (21) si ottengono poi le

$$\sum_1^{n}{}_p y_k^{(p)} \left\{ a_{pr,st} + \sum_1^{m-n}{}_i (b_{i|rs} \, b_{i|pt} - b_{i|rt} \, b_{i|ps}) \right\} =$$

$$\sum_1^{m-n}{}_i z_{ki} \left\{ b_{i|rst} - b_{i|rts} + \sum_1^{m-n}{}_j (b_{j|rt} \cdot \mu_{ji|s} - b_{j|rs} \cdot \mu_{ji|t} \right)$$

le quali equivalgono alle

$$a_{pr,st} = \sum_1^{m-n}{}_i (b_{i|ps} \, b_{i|rt} - b_{i|pt} \, b_{i|rs}) \qquad I)$$

$$b_{i|rst} - b_{i|rts} = \sum_{1j}^{m-n} \left(b_{j|rs} \cdot \mu_{ji|t} - b_{j|rt} \cdot \mu_{ji|s} \right) \quad (II)$$

$$(i = 1,2,\ldots m-n;\ r,s,t = 1,2,\ldots n).$$

Applichiamo la derivazione covariante secondo φ anche alle (C) e troveremo le

$$z_{ki|rs} = -\sum_{1p}^{n} y_k^{(p)} \left(b_{i|prs} + \sum_{1j}^{m-n} b_{j|ps} \cdot \mu_{ji|r} \right)$$

$$+ \sum_{1j}^{m-n} z_{kj} \left(\mu_{ji|rs} - \sum_{1pq}^{n} a^{(pq)} b_{i|pr}\, b_{j|qs} - \sum_{1l}^{m-n} \mu_{li|r} \cdot \mu_{lj|s} \right).$$

Tra queste eliminando le derivate seconde delle z_{ki} e tenendo conto delle (II) si giunge in fine ad un sistema, che equivale al seguente

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{ji|rs} - \mu_{ji|sr} + \sum_{1l}^{m-n} \left(\mu_{lj|r} \cdot \mu_{li|s} - \mu_{lj|s} \cdot \mu_{li|r} \right) = \\ &= \sum_{1pq}^{n} a^{(pq)} \left(b_{i|pr} \cdot b_{j|qs} - b_{i|ps} \cdot b_{j|qr} \right) \end{aligned}\right\} (III).$$

Il sistema, che comprende le (1) le $\left(\frac{2}{3}\right)$ e le (A), (B) e (C) è completo, come risulta dalle cose esposte sopra, se gli elementi degli $n-m$ sistemi doppi $b_{i|rs}$ e degli $\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}$ sistemi semplici $\mu_{ij|r}$ sodisfanno alle equazioni (I) (II) e (III). Abbiamo quindi il seguente teorema generale, che contiene un criterio per determinare la classe di qualunque forma differenziale quadratica positiva:

„ La classe di una forma differenziale quadra=

„tica positiva ad n variabili è data dal numero „$m-n$ se m è il minimo numero intiero e po„sitivo, pel quale risulta possibile determinare „$m-n$ sistemi doppî ed $\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}$ sistemi „semplici tali che indicando con $b_{i|rs}$ ($i = 1, 2, \ldots m-n$; „$r, s = 1, 2, \ldots n$) gli elementi dei primi e con $\mu_{ij|r}$ „($i, j = 1, 2, \ldots m-n$; $r = 1, 2, \ldots n$) quelli del secondo, ed „essendo $\mu_{ij|r} + \mu_{ji|r} = 0$, siano soddisfatte identi„camente le equazioni (I), (II) e (III)."

Verificate queste condizioni per soddisfare alle equazioni (1) conviene integrare il sistema completo, che contiene insieme a queste le (2_3) e le (A), (B), (C), ed il cui sistema integrale generale contiene $\frac{m(m-1)}{2}$ costanti non additive ed m costanti additive. Le prime coincidono anche in questo caso con quelle contenute in una sostituzione ortogonale relativa ad m variabili.

Capitolo Quinto

Degli invarianti differenziali assoluti comuni ad una forma fondamentale ed ai sistemi associati.

Emunciato e risoluzione del problema generale, che riguarda tutti gli invarianti differenziali di un dato ordine, che

possono ottenersi da determinati sistemi associati ad una forma fondamentale. Considerazioni speciali relative alle forme binarie e ternarie ed alle forme di classe o — Parametri differenziali. Teorema generale sulle funzioni armoniche.

---

31. Data una forma fondamentale

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \ ,$$

ed uno o più sistemi covarianti o controvarianti ad essa associati, interessa di determinare tutte le espressioni, che possono formarsi coi coefficienti di φ, cogli elementi dei sistemi associati e colle loro derivate fino ad un certo ordine p, le quali sono dotate della proprietà che, sostituendo alle variabili x altre n variabili indipendenti y nelle espressioni formate cogli elementi relativi a queste nello stesso modo come le espressioni primitive lo erano cogli elementi relativi alle variabili antiche; così che per trasformare tali espressioni basta sostituire ad ogni elemento relativo alla forma φ ed ai sistemi dati i corrispondenti elementi relativi alla trasformata (φ) ed ai sistemi trasformati nelle nuove variabili.

Tali espressioni si chiamano invarianti assoluti di ordine p: gli invarianti di ordine 0, che cioè contengono soltanto i coefficienti di φ e gli elementi dei sistemi associati, si dicono invarianti assoluti algebrici; se è $p > 0$ gli invarianti si dicono differenziali.

Chiameremo invarianti assoluti propri di una forma fondamentale φ, quelli, che dipendono soltanto dai coefficienti di φ e dalle loro derivate. Tale è per esempio, per le forme binarie, l'invariante di Gauss. Esempi di invarianti assoluti comuni alla forma fondamentale ed ai sistemi associati li abbiamo invece in quelli, che si ottengono componendo due sistemi dello stesso ordine, di cui uno sia covariante e l'altro contravariante.

32. La determinazione degli invarianti assoluti algebrici riguarda l'Algebra, dacchè coincide col teorema fondamentale della teoria delle forme algebriche. Vedremo ora come il Calcolo Differenziale Assoluto riconduca a questo stesso problema quello della determinazione degli invarianti assoluti differenziali.

Prima di tutto si osservi che noi possiamo supporre che i sistemi associati alla forma fon-

damentale siano tutti covarianti, considerando come tali, a tenore di una osservazione già fatta, anche quelli di ordine 0. Infatti i sistemi controvarianti possono intendersi sostituiti da quelli covarianti reciproci ad essi rispetto alla forma fondamentale. Si osservi in secondo luogo che gli invarianti di ordine p possono considerarsi come funzioni dei primi p sistemi derivati dai sistemi associati anzichè delle derivate degli elementi di tali sistemi. Sappiamo infatti dal Capitolo Terzo che le derivate prime degli elementi di un sistema covariante si esprimono linearmente per questi elementi e per quelli del 1° sistema derivato, ed è facile dedurne in generale che le derivate di un ordine r qualunque si esprimono per gli elementi dei sistemi proposti e dei primi r sistemi derivati da essi secondo φ. — Per ragione analoga, poichè le derivate prime dei coefficienti di φ si esprimono linearmente pei simboli di Christoffel, alle derivate fino all'ordine p di quei coefficienti potremo intendere sostituiti i simboli di Christoffel e le loro derivate fino all'ordine $p-1$.

Sia ora I un invariante di ordine p espresso per gli elementi relativi alle variabili x,

ed $(\mathfrak{J})$ l'invariante stesso espresso per gli elementi, relativi alle variabili y. La equazione

$$(\mathfrak{J}) = \mathfrak{J} \qquad 1)$$

dovrà cambiarsi in identità quando nel primo membro agli elementi relativi alle variabili y si sostituiscano le loro espressioni per quelli relativi alle x. In altri termini la equazione (1) dovrà risultare dalla eliminazione delle derivate delle x rispetto alle y tra le equazioni, che definiscono le sostituzioni da eseguirsi per la sostituzione delle y alle x sugli elementi pei quali intendiamo espresso $\mathfrak{J}$ in conformità alle cose dette sopra.

Tali equazioni possono distinguersi in tre gruppi comprendendo in un primo gruppo (A) quelle, che riguardano le sostituzioni da eseguirsi sui coefficienti della forma fondamentale, nonchè sugli elementi dei sistemi associati e di quelli da essi derivati secondo φ; in un secondo gruppo (B) quelle, che riguardano i simboli di Christoffel; ed in un terzo gruppo (C) quelle, che riguardano le derivate di questi simboli.

Mentre il gruppo (A) contiene soltanto le derivate prime delle x rispetto alle y, il gruppo (B) è risolubile rispetto alle derivate seconde e non condu-

ce ad alcuna equazione, che contenga le sole derivate prime. Quanto al gruppo C esso può considerarsi come ottenuto dal gruppo B mediante $p-1$ derivazioni successive. Però se ci fermiamo alle equazioni, che si ottengono mediante una prima derivazione secondo φ vediamo che, eliminate le derivate seconde delle x mediante le equazioni del gruppo (B), essi si dividono in due sottogruppi, di cui uno è risoluto rispetto alle derivate terze delle x, e l'altro, da cui queste derivate sono eliminate, definisce la sostituzione da eseguirsi sui simboli di Riemann per la sostituzione delle y alle x. Le equazioni, che poi si possono ottenere con ulteriori derivazioni, eliminando le derivate delle x rispetto alle y di ordine superiore al primo, sono tutte e soltanto quelle, che definiscono le sostituzioni da eseguirsi sui sistemi derivati dal sistema covariante, che ha per elementi i simboli di Riemann.

Possiamo dunque concludere che

Per ottenere tutti gli invarianti assoluti differenziali di ordine p comuni ad una forma fondamentale φ ed a dati sistemi ad essa associati basta determinare gli invarianti algebrici comuni a quella forma, al sistema dei simboli di Riemann ad essa relativi ed ai sistemi as-

„sociati, nonchè ai primi $p-2$ sistemi derivati
„da quello ed ai primi p sistemi derivati da
„questi secondo φ.

„Quando si vogliano soltanto agli inva=
„rianti assoluti di ordine p proprii della forma
„fondamentale basterà considerare assieme a
„questa il sistema dei simboli di Riemann e
„quelli dei primi $p-2$ sistemi da esso derivati
„secondo φ."

Da questo teorema e dalla teoria degli inva=
rianti algebrici comuni a più forme risulta

I° Che non esiste alcun'invariante assoluto d'or=
dine inferiore al 2° proprio della forma fonda=
mentale.

II° Che per ottenere tutti gli invarianti assolu=
ti di 1° ordine comuni alla forma fondamen=
tale ed a certi sistemi associati basta determi=
nare tutti gli invarianti algebrici comune al=
la forma fondamentale, ai sistemi associati
ed ai primi sistemi derivati da questi secon=
do la forma fondamentale.

III° Che gli invarianti differenziali di un ordine
qualunque p sono funzioni soltanto dei coefficien=
ti della forma fondamentale, degli elementi dei
sistemi associati e dei loro primi p sistemi deri=

vati nonchè dei simboli di Riemann e dei primi $p-2$ sistemi derivati dal sistema covariante, che ha questi simboli per elementi; e non dipendono esplicitamente dai simboli di Christoffel.

33. Nel caso di $n=2$ invece del sistema dei simboli di Riemann possiamo considerare il solo invariante G di Gauss. — Si ha quindi che

„ Per le forme differenziali quadratiche bi-
„ narie positive esiste un solo invariante pro-
„ prio di 2° ordine che è l'invariante G di Gauss.
„ Tutti gli invarianti proprii di ordine p supe-
„ riore al 2° si ottengono determinando tutti
„ gli invarianti algebrici comuni alla forma
„ fondamentale ed ai primi $p-2$ sistemi cova-
„ rianti derivati dalla funzione G secondo φ. „

„ Se si vogliono invece gli invarianti di ordi-
„ ne p comuni alla forma φ ed a certi sistemi
„ associati conviene determinare tutti gli inva-
„ rianti algebrici comuni a questa, ai sistemi
„ associati ed ai primi p sistemi derivati da que-
„ sti secondo φ nonchè, per $p > 2$, ai primi $p-2$ si-
„ stemi derivati come sopra da G. „

34. Nel caso di $n=3$ invece del sistema covariante quadruplo, che ha per elementi i simboli di Riemann a quattro indici, abbiamo da consi-

derare quello doppio controvariante, che ha per elementi i simboli di Riemann a due indici. Considereremo invece quello ad esso reciproco rispetto a φ e potremo asserire che

„ Per le forme differenziali quadratiche „ ternarie positive esistono tre invarianti pro„prii di 2° ordine e sono quelli comuni alla „ forma fondamentale e a quella, che ha per „ coefficienti gli elementi del sistema reciproco „ a quello dei simboli di Riemann a due in„dici. Tutti gli invarianti proprii di ordine „ $p > 2$ si ottengono determinando tutti gli inva„rianti algebrici comuni alla forma fondamen„tale al sistema sopra ricordato ed ai primi $p-2$ „ sistemi derivati da esso secondo la forma fon„damentale. Per avere gli invarianti comu„ni alla forma fondamentale ed a certi si„stemi associati conviene considerare altre„sì assieme a questi sistemi i primi p siste„mi derivati da essi secondo φ."

35. Per le forme di classe o i risultati del § 32 prendono forma più semplice dacchè in questo caso, come sappiamo dal Capitolo Quarto, i simboli di Riemann sono identicamente nulli. In questo caso si ha che :

"I° Non esistono invarianti assoluti proprî
„ della forma fondamentale."

"II° Per ottenere tutti gli invarianti differen-
„ ziali assoluti di un dato ordine p communi
„ alla forma fondamentale ed ai sistemi asso-
„ ciati basta determinare tutti gli invarianti
„ associati algebrici comuni oltre che alla for-
„ ma fondamentale ed ai sistemi associati an-
„ che ai primi p sistemi derivati da questi se-
„ condo la forma stessa."

36. Applichiamo i risultati generali dei paragrafi precedenti alla determinazione di alcuni invarianti assoluti, che hanno speciale importanza per le applicazioni, a cui miriamo.

Sappiamo che se X_r ed Y_r sono gli elementi di due sistemi semplici covarianti la espressione

$$\mathfrak{I} = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a^{(rs)} X_r Y_s = \sum_{1}^{n}{}_{r} X^{(r)} Y_r$$

è un invariante. Se, indicando con $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ due funzioni qualunque, poniamo

$$X_r = \frac{d\mathfrak{U}}{dx_r} = \mathfrak{U}_r ,\; Y_r = \frac{d\mathfrak{V}}{dx_r} = \mathfrak{V}_r$$

otteniamo un invariante di 1° ordine con due funzioni arbitrarie $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$, che si indica col simbolo $\nabla(\mathfrak{U}\,\mathfrak{V})$ e si chiama parametro differenziale di

1° ordine intermedio o misto delle due funzioni $\underline{\mathcal{U}}$ e $\underline{\mathcal{V}}$. La sua espressione è dunque data dalla formola

$$\nabla \mathcal{U}\mathcal{V} = \sum_{1\,r}^{n} \mathcal{U}^{(r)}\mathcal{V}_r = \sum_{1\,rs}^{n} a^{(rs)} \frac{d\mathcal{U}}{dx_r}\frac{d\mathcal{V}}{dx_s}$$

Se si suppone $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ si ha invece il quadrato del parametro differenziale di 1° ordine di una sola funzione $\mathcal{U}$. Esso si rappresenta col simbolo $\underset{1}{\Delta}\,\mathcal{U}$ e però si ha

$$(\underset{1}{\Delta}\,\mathcal{U})^2 = \sum_{1\,r}^{n} \mathcal{U}^{(r)}\mathcal{U}_r = \sum_{1\,rs}^{n} a^{(rs)} \frac{d\mathcal{U}}{dx_r}\frac{d\mathcal{U}}{dx_s}.$$

Osservazione: Se la forma fondamentale è di classe $\underline{o}$ e ridotta alla forma canonica si hanno per $\nabla \mathcal{U}\mathcal{V}$ e $(\underset{1}{\Delta}\,\mathcal{U})^2$ le espressioni:

$$\nabla \mathcal{U}\mathcal{V} = \sum_{1\,r}^{n} \frac{d\mathcal{U}}{dx_r}\frac{d\mathcal{V}}{dx_r},$$

$$(\underset{1}{\Delta}\,\mathcal{U})^2 = \sum_{1\,r}^{n} \left(\frac{d\mathcal{U}}{dx_r}\right)^2$$

37. In secondo luogo consideriamo insieme alla forma fondamentale un sistema doppio simmetrico covariante di elementi X_{rs}. Come si sa dall'Algebra, si hanno in questo caso $\underline{n}$ invarianti assoluti comuni alla forma fondamentale φ ed alla forma

$$\psi = \sum_{1\,rs}^{n} X_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e questi invarianti sono dati dai rapporti dei coef-

ficienti delle successive potenze di $\underline{w}$ nello svi=luppo del determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} + w \cdot a_{11} & X_{12} + w \cdot a_{12} & \dots & X_{1n} + w \cdot a_{1n} \\ X_{21} + w \cdot a_{21} & X_{22} + w \cdot a_{22} & \dots & X_{2n} + w \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} + w \cdot a_{n1} & X_{n2} + w \cdot a_{n2} & \dots & X_{nn} + w \cdot a_{nn} \end{vmatrix}$$

al coefficiente di w^n, cioè al discriminante $\underline{a}$. Essi sono quindi rispettivamente dei gradi $1, 2, \dots n$ ri=spetto alle X_{rs}; e qui saranno indicati coi simboli $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \dots \mathfrak{J}_n$. Essi sono algebrici rispetto al sistema doppio di elementi X_{rs}; ma, se questo è il primo sistema derivato secondo φ da un sistema sempli=ce di elementi X_r sono di 1° ordine rispetto a que=sto; e di 2° ordine rispetto ad una funzione $\mathfrak{U}$, se il sistema doppio X_{rs} è il secondo sistema co=variante derivato da $\underline{\mathfrak{U}}$ secondo φ. – In ques=t'ultimo caso gli invarianti $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \dots \mathfrak{J}_n$, rispet=tivamente dei gradi 1°, 2°, … n^{simo} nelle derivate di $\underline{\mathfrak{U}}$, si indicano coi simboli $\Delta_{21}(\mathfrak{U}), \Delta_{22}(\mathfrak{U}) \dots \Delta_{2n}(\mathfrak{U})$: il primo di essi più comunemente vie=ne indicato col simbolo $\Delta_2 \mathfrak{U}$, ed è noto sotto il nome di parametro differenziale di 2° ordine di una funzione $\underline{\mathfrak{U}}$.

38. Consideriamo l'invariante

$$\mathfrak{J}_1 = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{(rs)} X_{rs} \qquad 2).$$

del paragrafo precedente nel caso, in cui il sistema di elementi X_{rs} sia il 1° sistema derivato secondo φ da un sistema semplice di elementi X_r. Avendosi allora le formole

$$X_{rs} = \frac{dX_r}{dx_s} - \sum_{1p}^{n} a_{rs,p} X^{(p)} \qquad 3)$$

sarà

$$\mathfrak{J}_1 = \sum_{1rs}^{n} a^{(rs)} \frac{dX_r}{dx_s} - \sum_{1p}^{n} X^{(p)} \sum_{1rs}^{n} a^{(rs)} a_{rs,p} \qquad 4)$$

Si osservi che, avendosi le

$$\sum_{1r}^{n} a^{(rs)} a_{rp} = \varepsilon_{ps} \ ,$$

nelle quali i simboli ε_{ps} hanno il significato loro attribuito altre volte, varranno altresì le

$$\sum_{1r}^{n} a^{(rs)} \frac{da_{rp}}{dx_s} = -\sum_{1r}^{n} a_{rp} \frac{da^{(rs)}}{dx_s}$$

ed anche, essendo $a^{(rs)} = \frac{1}{a}\frac{da}{da_{rs}}$,

$$\frac{1}{2} \sum_{1rs}^{n} a^{(rs)} \frac{da_{rs}}{dx_p} = \frac{d\log\sqrt{a}}{dx_p}$$

Da queste, ricordando le espressioni dei simboli di Christoffel si traggono le

$$-\sum_{1p}^{n} X^{(p)} \sum_{1rs}^{n} a^{(rs)} a_{rs,p} = \sum_{1rs}^{n} X_r \frac{da^{(rs)}}{dx_s} + \sum_{1r}^{n} X^{(r)} \frac{d\log\sqrt{a}}{dx_r} ,$$

e quindi per la (4)

$$\mathfrak{J}_1 = \sum_{1r}^{n} \left(\frac{dX^{(r)}}{dx_r} + X^{(r)} \frac{d\log\sqrt{a}}{dx_r} \right)$$

od anche

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r^n \frac{d(\sqrt{a}\, X^{(r)})}{dx_r} \qquad 5)$$

Supponendo ancora che le X_r siano le derivate di una funzione $\mathcal{U}$ rispetto alle x_r, dalle (2) e (5) si hanno pel parametro differenziale di 2° ordine di una funzione $\mathcal{U}$ le espressioni

$$\underset{2}{\Delta} \mathcal{U} = \sum_{rs}^n a^{(rs)} \mathcal{U}_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r^n \frac{d(\sqrt{a}\, \mathcal{U}^{(r)})}{dx_r} \qquad 6)$$

Osservazione: Se la forma fondamentale φ è di classe $\underline{o}$ ed è ridotta alla forma canonica, la (2) e la (6) assumono rispettivamente le espressioni

$$\mathfrak{I}_1 = \sum_r^n \frac{dX_r}{dx_r} \qquad 7)$$

$$\underset{2}{\Delta} \mathcal{U} = \sum_r^n \frac{d^2 \mathcal{U}}{dx_r^2}. \qquad 8)$$

39. Si chiamano funzioni armoniche quelle, che soddisfano alla equazione a derivate parziali di 2° ordine

$$\underset{2}{\Delta} \mathcal{V} = o$$

Data ora una funzione qualunque $\underline{\mathcal{U}}$ proponiamoci di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza di una funzione armonica $\mathcal{V}$ della sola $\mathcal{U}$. A questo intento osserviamo che, se $\underline{\mathcal{V}}$ è una funzione di $\mathcal{U}$ valgono le identità

$$\mathcal{V}_r = \mathcal{V}'(\mathcal{U}) . \mathcal{U}_r$$

$$\mathcal{V}_{rs} = \mathcal{V}'(\mathcal{U}) . \mathcal{U}_{rs} + \mathcal{V}''(\mathcal{U}) . \mathcal{U}_r \mathcal{U}_s \;;$$

e quindi la

$$\Delta_2 V = V'(U)\cdot\Delta_2 U + V''(U)(\Delta_1 U)^2$$

Perchè la funzione V risulti armonica, deve dunque essere tale che si abbia

$$V'(U)\cdot\Delta_2 U + V''(U)(\Delta_1 U)^2 = 0\ ;$$

cioè

$$\frac{\Delta_2 (U)}{\Delta_1 (U)^2} = \psi(U), \qquad 9)$$

posto

$$\psi(U) = -\frac{d \log V'(U)}{dU}, \qquad 10)$$

Ne segue che, rappresentando con ψ una funzione qualunque di U, perchè esista una funzione armonica $V(U)$ è necessario e basta che sia soddisfatta la (9), e che, soddisfatta questa, si avranno tutte le funzioni armoniche della U integrando la equazione (10). La espressione generale di tali funzioni sarà quindi data dalla formola

$$V(U) = c\int e^{-\int\psi(U)\,dU} + C\,,$$

con c e C indicando due costanti arbitrarie.

Capitolo Sesto

Del calcolo differenziale assoluto a due variabili indipendenti.

Sistemi ortogonali canonici. Sistemi semplici ad inva-

rianti algebrici eguali all'unità e sistemi da essi dedotti. — Equazioni differenziali pei sistemi, che risultano delle derivate di una funzione e pei sistemi dedotti. Forme canoniche pei sistemi semplici e pei sistemi doppi. Equivalenza di due forme binarie e loro trasformazione.

---

40. Fermiamo ora in modo speciale la nostra attenzione sul caso di due sole variabili indipendenti per dedurre dai metodi generali del Capitolo Terzo alcune conseguenze speciali per questo caso.

Conveniamo di considerare come equivalenti gli indici, che sono insieme pari ed insieme dispari ed, essendo

$$\varphi = \sum_{rs}^{2} {}_{1} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\ ,$$

la forma fondamentale, che supporremo sempre positiva, consideriamo un sistema semplice covariante di elementi μ_r. Conserviamo tutte le notazioni e convenzioni stabilite nel caso generale e poniamo di più

$$\bar{\mu}_r = (-1)^{r+1} \sqrt{a}\, \mu^{(r+1)} \qquad 1)$$
$$(r = 1, 2)\ ,$$

designando con $\sqrt{a}$ la radice positiva di $\underline{a}$. Considerando assieme alle $\underline{x}$ un nuovo sistema di variabili y avremo

$$(\bar{\mu}_r) = (-1)^{r+1} \sqrt{(\bar{a})}\, (\mu^{(r+1)})$$
$$(\mu^{r+1}) = \sum_{s}^{2} {}_{1} \mu^{(s)}\, y^{(s)}_{r+1}\ .$$

Poichè, $\mathcal{D}$ essendo ancora il determinante funzionale delle $\underline{x}$ rispetto alle y, per r = 2, supposto, come è permesso $\mathcal{D} > 0$, valgono le formule

$$\mathcal{D}_{y_{r+1}}^{(s)} = (-1)^{r+s+1} x_{s+1}^{(r)}$$

$$\mathcal{D} . \sqrt{a} = \sqrt{(a)}$$

dalle formole scritte sopra risultano le

$$(\bar{\mu}_r) = \sum_{1}^{2} {}_s \bar{\mu}_s \, x_s^{(r)} .$$

Il sistema di elementi $\bar{\mu}_r$ è dunque covariante, come quello di elementi μ_r.

Nel caso di n = 2 valgono ancora le formole

$$a . a^{(rs)} = (-1)^{r+s} a_{r+1, s+1}$$

e però le

$$\bar{\mu}^{(s)} = \sum_{1}^{2} {}_r \, a^{(rs)} \bar{\mu}_r ,$$

tenendo ancora conto delle (1), assumono la forma

$$\bar{\mu}^{(s)} = \frac{(-1)^{s+1}}{\sqrt{a}} \mu_{s+1} \qquad 1)$$

Da queste poi e dalle (1) si traggono facilmente le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{2} {}_r \, \mu^{(r)} \bar{\mu}_r &= 0 \\ \sum_{1}^{2} {}_r \, \mu^{(r)} \mu_r &= \sum_{1}^{2} {}_r \, \bar{\mu}^{(r)} \bar{\mu}_r . \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Se partendo dal sistema $\bar{\mu}_r$ ne deduciamo un nuovo sistema covariante nello stesso modo, con cui dal sistema μ_r abbiamo tratto il sistema $\bar{\mu}_r$, tro-

sviamo il sistema di elementi $-\mu_r$.

Diremo ortogonale canonico il sistema $\bar{\mu}_r$ definito dalle (1) rispetto al sistema μ_r (e così il sistema $\bar{\mu}^{(r)}$ rispetto al sistema $\mu^{(r)}$) ed avremo che

1° „ I sistemi ortogonali canonici rispetto a „ due sistemi reciproci sono reciproci."

2° „ Se il sistema di elementi $\bar{\mu}_r$ (rispettivamen„te $\bar{\mu}^{(r)}$) è canonico ortogonale rispetto al sistema „μ_r (rispettivamente $\bar{\mu}^{(r)}$), il sistema di elementi $-\mu_r$ „(rispettivamente $-\mu^{(r)}$) è canonico ortogonale ri„spetto a quello di elementi $\bar{\mu}_r$ (rispettivamente „$\bar{\mu}^{(r)}$)."

In generale, come si è fatto fin qui, designando con μ_r gli elementi di un sistema, intenderemo in pari tempo di designare con $\bar{\mu}_r$ quelli del sistema ortogonale. — Premesso ciò, è facile dedurre dalle (1) che

3° „ Se si hanno due sistemi covarianti rispet„tivamente di elementi μ_r e ν_r, valgono le i„dentità

$$\sum_{r}^{2}{}_{1} \bar{\mu}^{(r)} \bar{\nu}_r = \sum^{2} \mu^{(r)} \nu_r$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} \mu^{(r)} \bar{\nu}_r = -\sum_{1}^{2}{}_{r} \bar{\mu}^{(r)} \nu_r \, ."$$

Dalle (1) si traggono ancora le formole

$$\mu_2 \bar{\mu}_1 - \mu_1 \bar{\mu}_2 = \sqrt{a} \sum_{1}^{2}{}_{r} \mu^{(r)} \mu_r \qquad 3)$$

In fine la formola (γ_0) del Capitolo Terzo assume nel nostro caso la forma

$$\mu_{r21} - \mu_{r12} = \sqrt{a}\, G \cdot \bar{\mu}_r , \qquad (r = 1,2) \qquad 4)$$

con G indicando al solito l'invariante di Gauss relativo alla forma fondamentale.

41. Considerando un sistema semplice covariante di elementi μ_r come associato alla forma fondamentale chiameremo invariante algebrico del sistema l'invariante $\sum_{1}^{2}{}_r \mu^{(r)}\mu_r$, che sarà essenzialmente positivo. — Risulta poi dalle (2) che gli invarianti algebrici di due sistemi canonici ortogonali sono eguali fra di loro.

Si consideri ora un sistema semplice covariante di elementi λ_r ad invariante algebrico eguale all'unità e si facciano le posizioni

$$a_{rs} = \alpha\, \lambda_r \lambda_s + \alpha_1 (\lambda_r \bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r \lambda_s) + \alpha_2 \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s$$

È chiaro che α ed α_2 sono gli invarianti algebrici dei due sistemi λ_r e $\bar{\lambda}_r$ mentre è $\alpha_1 = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} \bar{\lambda}_r$. — Abbiamo dunque $\alpha = \alpha_2 = 1$ e per le (2) $\alpha_1 = 0$. Valgono dunque le

$$a_{rs} = \lambda_r \lambda_s + \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s \qquad (r, s = 1,2) \qquad 5)$$

e per le (3) la

$$\lambda_2 \bar{\lambda}_1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2 = \sqrt{a} . \qquad 6)$$

Se si deriva la equazione

acc(16) pag 115

$$\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1$$

si ottengono le formole

$$\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \lambda_{rs} = 0$$
$$(s = 1, 2) \; .$$

La equazione algebrica

$$\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \xi_r = 0 \; ,$$

che ammette la soluzione $\xi_r = \bar{\lambda}_r$, ammette dunque altresì le soluzioni $\xi_r = \lambda_{r1}$, $\xi_r = \lambda_{r2}$. Possiamo quindi, introducendo un sistema semplice di elementi φ_s, fare le posizioni

$$\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \, \varphi_s \; , \qquad 7)$$
$$(r, s = 1, 2)$$

Da queste si traggono le

$$\varphi_s = \sum_1^2 {}_r \bar{\lambda}^{(r)} \lambda_{rs} \; , \qquad 8)$$
$$(s = 1, 2)$$

le quali ci dicono che il sistema di elementi φ_s è covariante. Lo chiameremo sistema dedotto da quello di elementi λ_r.

La derivazione della identità

$$\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \bar{\lambda}_r = 0$$

conduce alle formole

$$\varphi_s = - \sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \bar{\lambda}_{rs} \qquad 9)$$
$$(s = 1, 2) \; ,$$

che equivalgono alle

$$\bar{\lambda}_{rs} = -\lambda_r \varphi_s \qquad 9_1)$$

Tenendo conto di queste e derivando di nuovo le (7) covariantemente secondo la forma fondamentale, perveniamo alle

$$\lambda_{rst} = \bar{\lambda}_r \varphi_{st} - \lambda_r \varphi_s \varphi_t \;;$$

e quindi alle

$$\lambda_{r12} - \lambda_{r21} = \bar{\lambda}_r (\varphi_{12} - \varphi_{21})$$
$$(r = 1,2) .$$

Dal confronto di queste colle (4) ricaviamo poi la

$$\varphi_{21} - \varphi_{12} = \sqrt{a}\, G .$$

Dato il sistema di elementi φ_s e considerando come incognite le λ_r, questa equazione rappresenta, come è facile riconoscere, la condizione necessaria e sufficiente perchè sia completo il sistema, che risulta delle equazioni (7) e della $\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1$. Il sistema integrale generale di un tale sistema completo contiene una costante arbitraria ed è facile verificare che se $\lambda_r = \lambda'_r$ ne è un sistema integrale particolare, il sistema integrale generale si ha ponendo

$$\lambda_r = \cos\alpha \; \lambda'_r + \operatorname{sen}\alpha \; \bar{\lambda}'_r \,,$$

con α indicando appunto una costante arbitraria.

42. Si abbiamo due sistemi semplici covarianti rispettivamente di elementi μ_r e λ_r, di cui il primo qualunque ed il secondo ad invariante

algebrico eguale all'unità. Si facciano le posizioni

$$\mu_r = \alpha \lambda_r + \beta \bar{\lambda}_r \qquad 10)$$

e (§ 40) varranno anche le

$$\bar{\mu}_r = -\beta \lambda_r + \alpha \bar{\lambda}_r \qquad 10_1)$$

Dalle (10) per derivazione covariante secondo φ deduciamo le

$$\mu_{rs} = \alpha_s \lambda_r + \beta_s \bar{\lambda}_r + \varphi_s \bar{\mu}_r$$

e per conseguenza la

$$\frac{\mu_{21} - \mu_{12}}{\sqrt{a}} = \sum_1^2{}_p \alpha^{(p)} \bar{\lambda}_p - \sum_1^2{}_p \beta^{(p)} \lambda_p - \sum_1^2{}_p \varphi^{(p)} \mu_p .$$

Analogamente dalle (10₁) si traggono le

$$\bar{\mu}_{rs} = \alpha_s \bar{\lambda}_r - \beta_s \lambda_r - \varphi_s \mu_r$$

$$\sum_1^2{}_{rs} a^{(rs)} \bar{\mu}_{rs} = \sum_1^2{}_p \alpha^{(p)} \bar{\lambda}_p - \sum_1^2{}_p \beta^{(p)} \lambda_p - \sum{}_p \varphi^{(p)} \mu_p .$$

Ne concludiamo che è

$$\mu_{21} - \mu_{12} \equiv \sqrt{a} \sum_1^2{}_{rs} a^{(rs)} \bar{\mu}_{rs}$$

e quindi

" La condizione necessaria e sufficiente perchè " gli elementi μ_r di un sistema semplice siano le " derivate di una funzione rispetto alle variabili in- " dipendenti x_r può mettersi sotto la forma

$$\sum_1^2{}_{rs} a^{(rs)} \bar{\mu}_{rs} = 0 \ . "$$

Ricordando poi l'ultimo teorema del paragrafo precedente si può asserire che

„Perchè un sistema di elementi μ_r sia il sistema dedotto da un sistema ad invariante algebrico eguale all'unità, è necessario e basta che si abbia identicamente

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\,\overline{\mu}_{rs} = \mathcal{G}\,.\text{"}$$

43. Dato un sistema semplice covariante di elementi μ_r, si possono sempre determinare un altro sistema di elementi λ_r della stessa natura e d'invariante algebrico eguale all'unità ed una funzione positiva ρ tale che risultino identicamente soddisfatte le equazioni

$$\mu_r = \rho\,\lambda_r \qquad\qquad c)$$

Basterà perciò prendere per ρ la radice positiva dell'invariante algebrico del sistema dato e definire le λ_r mediante le (c). Chiameremo le (c) espressioni canoniche sul sistema di elementi μ_r.

Facciamo le posizioni

$$\varphi_r = \gamma\,\lambda_r + (\gamma)\,\overline{\lambda}_r \qquad\qquad 11)$$
$$(r = 1, 2)$$

e deriviamo covariantemente le (c) secondo φ.

Ne trarremo le

$$\mu_{rs} = \lambda_r\,\rho_s + \rho\,\overline{\lambda}_r\,\varphi_s$$

e da queste successivamente le

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} \overline{\lambda}^{(r)} \mu_{rs} = \rho \varphi_s$$

$$\rho \cdot \gamma = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \overline{\lambda}^{(r)} \lambda^{(s)} \mu_{rs}\,; \quad \rho(\gamma) = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \overline{\lambda}^{(r)} \overline{\lambda}^{(s)} \mu_{rs} \cdot \qquad 12)$$

Poniamo ancora

$$\rho \nu = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \mu_{rs} \qquad 12_1)$$

e supponiamo che le μ_r siano le derivate di una funzione $\underline{\mu}$ rispetto alle x_r. Le (c) ci danno

$$\rho = \Delta_1 \mu \qquad (13)$$

e le (12) e (12_1) le

$$\frac{1}{\rho} \mu_{rs} = \nu \lambda_r \lambda_s + \gamma (\lambda_r \overline{\lambda}_s + \overline{\lambda}_r \lambda_s) + (\gamma) \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s \qquad 14)$$

Dalle

$$\rho^2 = \sum_{1}^{2}{}_{r} \mu^{(r)} \mu_r$$

avendosi poi le

$$\rho \rho_s = \sum_{1}^{2}{}_{r} \mu^{(r)} \mu_{rs}$$

ovvero le

$$\rho_s = \sum_{1}^{2}{}_{r} \lambda^{(r)} \mu_{rs}$$

dalle precedenti ricaviamo le

$$\frac{d \log \rho}{d x_s} = \nu \lambda_s + \gamma \overline{\lambda}_s . \qquad 14_1)$$

$$(s = 1, 2)$$

Dalle (11) e (14_1) e dai teoremi del § 42 seguono le

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} (\gamma)^{(r)} \lambda_r - \sum_{1}^{2}{}_{r} \gamma^{(r)} \overline{\lambda}_r + \gamma^2 + (\gamma)^2 + G = 0 \qquad 15)$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} \gamma^{(r)} \lambda_r - \sum_{1}^{2}{}_{r} \nu^{(r)} \lambda_r + \gamma (\nu + (\gamma)) = 0 \qquad 15_1)$$

Queste equazioni, come è facile verificare, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè sia completo il sistema (14), in cui per

le λ_r si intendono poste le espressioni date dalle (c) e per $\rho \underset{1}{\Delta} \mu$.

Dalle (14) risulta pure le

$$\frac{1,1}{\underset{1}{\Delta}\mu} \underset{2}{\Delta} \mu = \nu + (\gamma) \qquad 14_2)$$

44. Dati due sistemi covarianti, di cui uno doppio di elementi b_{rs} qualunque e l'altro semplice di elementi λ_r ad invariante algebrico eguale all'unità, possiamo sempre porre

$$b_{rs} = \alpha \lambda_r \lambda_s + \mu \lambda_r \overline{\lambda}_s + \nu \overline{\lambda}_r \lambda_s + \beta \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s, \quad (r, s = 1,2) \qquad 16)$$

poichè ciò equivale a porre

$$\alpha = \sum_{1}^{2}{}_{rs} b_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)}, \quad \mu = \sum_{1}^{2}{}_{rs} b_{rs} \lambda^{(r)} \overline{\lambda}^{(s)}$$

$$\nu = \sum_{1}^{2}{}_{rs} b_{rs} \overline{\lambda}^{(r)} \lambda^{(s)}, \quad \beta = \sum_{1}^{2}{}_{rs} b_{rs} \overline{\lambda}^{(r)} \overline{\lambda}^{(s)}.$$

Se il sistema doppio è simmetrico risulta $\mu = \nu$ e le (16) assumono la forma

$$b_{rs} = \alpha \lambda_r \lambda_s + \mu (\lambda_r \overline{\lambda}_s + \overline{\lambda}_r \lambda_s) + \beta \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s \qquad 16_1)$$

Vogliamo ora dimostrare che si può scegliere il sistema semplice in modo che risulti $\mu = 0$ e le (16_1) assumano quindi la forma

$$b_{rs} = \alpha \lambda_r \lambda_s + \beta \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s \qquad C)$$
$$(r, s = 1,2)$$

La equazione $\mu = 0$ equivale alle

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} b_{rs} \lambda^{(r)} = \omega \lambda_s$$

ovvero alle

$$\sum_{1}^{2}{}_r \left(b_{rs} - \omega a_{rs} \right) \lambda^{(r)} = 0 \qquad 17)$$
$$(s = 1, 2),$$

indicando con $\underline{\omega}$ una indeterminata. Questa dovrà soddisfare alla equazione

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \omega a_{11} & b_{12} - \omega a_{12} \\ b_{21} - \omega a_{21} & b_{22} - \omega a_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad A)$$

la quale ha tutte le radici reali, e di più è tale che queste radici sono sempre distinte, se non sono soddisfatte le condizioni

$$b_{rs} = \omega a_{rs}$$
$$(r, s = 1 2),$$

nelle quali $\underline{\omega}$ rappresenta un coefficiente indeterminato. Verificate queste condizioni, le radici della equazione (A) sono invece amendue eguali ad ω.

Segue da ciò che in quest'ultimo caso è $\mu = 0$ qualunque sia il sistema di elementi λ_r di invariante algebrico eguale all'unità.

Se le radici della equazione (A) sono distinte e si indicano con $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$, ciascuno dei sistemi di equazioni algebriche

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{2}{}_s \left(b_{rs} - \alpha a_{rs} \right) \lambda^{(r)} = 0 \\ \sum_{1}^{2}{}_s \left(b_{rs} - \beta a_{rs} \right) \lambda^{(r)} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$
$$(r = 1, 2)$$

ammette una ed una sola soluzione indipendente. Questa è rappresentata da un sistema controvariante, che supporremo scelto, come è permesso, in modo che il suo invariante algebrico risulti eguale all'unità. Se

$$\lambda^{(r)} = \lambda_1^{(r)}\ ,\ \lambda^{(r)} = \lambda_2^{(r)}$$

sono rispettivamente le soluzioni così scelte del primo e del secondo sistema, come è facile riconoscere, si ha

$$\sum_1^2{}_r\, \lambda_1^{(r)} \lambda_{2|r} = 0\ ;$$

e però posto

$$\lambda_1^{(r)} = \lambda^{(r)}$$

sarà

$$\lambda_2^{(r)} = \bar{\lambda}^{(r)}$$

Le identità (18), indicando con δ una indeterminata, si possono mettere sotto la forma

$$b_{rs} - \alpha\, a_{rs} = \delta\, \bar{\lambda}_r\, \bar{\lambda}_s\ ,$$

che, per le (5) equivale all'altra

$$b_{rs} = \alpha\, \lambda_r\, \lambda_s + (\alpha + \delta)\, \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s\ .$$

Come α, così anche $\alpha + \delta$ deve evidentemente essere radice della equazione (A), e poichè per $\delta = 0$ si ricadrebbe nel caso già considerato, sarà $\alpha + \delta = \beta$.

Chiameremo canonica la espressione di un sistema doppio covariante simmetrico di elementi b_{rs} ridotta alla forma (C) e potremo quindi asserire che

1°. " Se gli elementi b_{rs} sono proporzionali ai
" coefficienti a_{rs} della forma fondamentale ed in
" questo caso soltanto, si hanno pel sistema dato
" infinite espressioni canoniche, dacchè tali ri-
" sultano tutte le espressioni della forma (16,) qua-
" lunque sia il sistema semplice di elementi λ_r
" purchè ad invariante algebrico eguale all'unità.

2° " In ogni altro caso vi è un sol modo di
" ridurre il sistema dato alla forma canonica.
" Perciò occorre scegliere quel sistema semplice co-
" variante di invariante algebrico eguale all'u-
" nità, il cui reciproco soddisfa alle equazioni (17),
" per $\underline{\alpha}$ intendendo una radice della equazione (A).

3° " Gli invarianti $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ che compaiono nella
" espressione canonica di un sistema doppio cova-
" riante simmetrico di elementi b_{rs} sono le radici
" della equazione (A)."

45. I risultati del paragrafo precedente am-
mettono un'altra importante interpretazione a-
nalitica.

Si sa dal Calcolo Differenziale che è possibi-
le determinare due fattori ρ_1 e ρ_2 tali che, posto

$$\sum_{1}^{2} {}_r \lambda_r \, dx_r = \rho_1 \, dy_1 \qquad\qquad 19)$$
$$\sum_{1}^{2} {}_r \overline{\lambda}_r \, dx_r = \rho_2 \, dy_2 ,$$

dy_1 e dy_2 siano differenziali esatti. Posto ancora

$$\psi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s\ ,$$

le (5) e le (C) per le (19) equivalgono rispettivamente alle

$$\varphi = \rho_1^2\, dy_1^2 + \rho_2^2\, dy_2^2 \qquad 20)$$

$$\psi = \alpha\, \rho_1^2\, dy_1^2 + \beta\, \rho_2^2\, dy_2^2 \qquad 20_1)$$

Se viceversa, le forme φ e ψ per la sostituzione di due variabili indipendenti y_1 ed y_2 alle x_1 ed x_2 si riducono ad avere delle espressioni della forma (20) e (20,) e si fanno le posizioni (19), dalle (20) e (20,) si ripassa alle (5) ed alle (C). Dalle (19) si hanno di più le

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)} \lambda_r = \rho_1^2 \left(\underset{1}{\Delta}\, y_1\right)^2$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \bar{\lambda}^{(r)} \bar{\lambda}_r = \rho_2^2 \left(\underset{1}{\Delta}\, y_2\right)^2$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)} \bar{\lambda}_r = \rho_1 \rho_2 \nabla(y_1 y_2)\ .$$

E poichè dalla espressione (20) di φ si ricavano per i parametri differenziali di 1° ordine di y_1 ed y_2 le espressioni

$$\left(\underset{1}{\Delta}\, y_1\right)^2 = \frac{1}{\rho_1^2}\ ,\ \nabla(y_1\, y_2) = 0\ ,\ \left(\underset{1}{\Delta}\, y_2\right)^2 = \frac{1}{\rho_2^2}\ ,$$

dalle precedenti concludiamo che i sistemi di elementi λ_r e $\bar{\lambda}_r$ sono canonici ortogonali fra di loro ed

hanno gli invarianti algebrici eguali all'unità.

Il problema di ridurre il sistema b_{rs} alla forma canonica (C) equivale dunque a quello di ridurre insieme la forma fondamentale φ e la forma ψ a contenere soltanto i quadrati dei differenziali delle variabili indipendenti; e questa riduzione è possibile, come è evidente, in infiniti modi, se è

$$\psi \equiv \omega \varphi ;$$

in un solo modo in ogni altro caso. — Il paragrafo precedente ci insegna quindi anche a risolvere questo secondo problema.

46. Due forme differenziali quadratiche binarie

$$\varphi = \sum_{1\,rs}^{2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

$$\chi = \sum_{1\,pq}^{2} (a_{pq})\, dy_p\, dy_q$$

si dicono equivalenti, se è possibile determinare due funzioni $x_1(y_1 y_2)$, $x_2(y_1 y_2)$ di y_1 ed y_2 tali che sostituendole in φ ad x_1 ed x_2 si abbia identicamente $\varphi \equiv \chi$. Si dice allora anche che la φ e la χ sono trasformabili l'una nell'altra e che la prima si trasforma nella seconda mediante la sostituzione

$$x_1 = x_1(y_1 y_2), \quad x_2 = x_2(y_1 y_2) \qquad 21)$$

Supponiamo positive amendue le forme φ e ψ e proponiamoci.

1° di stabilire le condizioni necessarie e sufficienti per la loro equivalenza.

2° verificate quelle condizioni, di determinare tutte le sostituzioni, per le quali la prima si trasforma nella seconda.

Assumiamo perciò φ come forma fondamentale, e ricordiamo dal Capitolo Secondo che, ammessa la equivalenza della forma χ alla $\underline{\varphi}$ affinchè per la sostituzione (21) la φ si trasformi nella χ è necessario e basta che le funzioni x_1 ed x_2 soddisfacciano alle equazioni a derivate parziali di 1° ordine

$$\sum_1^2{}_{rs}\, a_{rs}\, x_r^{(p)} x_s^{(q)} = (a_{pq}) \;; \qquad \alpha) \qquad (p,q=1,2)$$

ed a quelle di 2° ordine

$$x_r^{(pq)} = \sum_1^2{}_{st} \left(a^{(st)}\right)\left(a_{pq,t}\right) x_r^{(s)} - \sum_1^2{}_{stu} a^{(ur)} a_{st,u}\, x_s^{(p)} x_t^{(q)}, \quad \beta)$$

che se ne deducono per derivazione. Se le (β) si derivano ancora e tra tutte le equazioni così ottenute si eliminano le derivate seconde mediante le (β) stesse e poi anche le derivate terze si giunge alla equazione

$$(G) = G, \qquad \gamma)$$

(G) e G essendo gli invarianti di Gauss rispettiva=

mente delle forme χ e φ.

La (γ) ci dice che le forme φ e χ non sono equivalenti, se una delle due espressioni G e (G) essendo eguale ad una data costante c, non lo è pure l'altra. Invece in questo caso ed in questo caso soltanto, la (γ) è soddisfatta identicamente ed il sistema, che comprende le (α) e le (β) è completo. Integrando questo sistema si avranno i valori delle x, che sostituiti nelle (21) dànno tutte le sostituzioni per le quali la forma φ si cambia identicamente nella χ. – Poichè il sistema integrale generale del sistema di equazioni (α, β) contiene tre costanti arbitrarie possiamo quindi concludere che

"Due forme differenziali quadratiche binarie positive tali che i loro invarianti di Gauss siano eguali ad una stessa costante sono equivalenti, ed il numero delle trasformazioni dell'una nell'altra è ∞^3."

Dalle considerazioni svolte sopra risulta ancora che la effettiva determinazione di tutte queste trasformazioni richiede la integrazione del sistema completo, che comprende le equazioni (α) e (β).

In particolare possiamo supporre χ identica

la φ. Abbiamo allora che

"Una forma differenziale quadratica binaria
"positiva, il cui invariante di Gauss sia costan-
"te è suscettibile di ∞^3 trasformazioni in sè stessa."

Per ottenere tutte queste trasformazioni, ba-
sterebbe integrare il sistema (α, β), dopo aver
messo al posto dei simboli tra parentesi i sim-
boli senza parentesi, in cui però ad x_1 ed x_2 si
siano sostituiti rispettivamente y_1 ed y_2.

47. Se $\underline{G}$ e (G) sono amendue vere e proprie fun-
zioni rispettivamente delle $\underline{x}$ e delle $\underline{y}$, la equa-
zione (γ) deve aggiungersi alle (α) e (β), assieme
a quelle, che se ne ottengono deducendo le deriva-
te prime e seconde di (G) in funzione di quelle
di $\underline{G}$ e delle derivate delle $\underline{x}$ rispetto alle $\underline{y}$. Fra que-
ste, le derivate seconde potranno poi sempre es-
sere eliminate mediante le (β).

Consideriamo le funzioni G e (G) rispettiva-
mente come associate alle forme fondamenta-
li φ e χ. Se le G_r e $(G)_p$ si riducono alla forma
canonica ponendo

$$G_r = \rho\,\lambda_r\,,\ (G)_p = (\rho)\,(\lambda_p)\ ,$$

le equazioni che si ottengono nel modo indicato,
quando si considerino soltanto le derivate pri-
me, equivalgono, come è facile riconoscere, alle

$$(\rho) = \rho \qquad \delta)$$

$$(\lambda_p) = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda_r \, x_r^{(p)} \qquad \varepsilon)$$

$$(p = 1, 2)$$

Se la (δ) non è soddisfatta nè identicamente, nè tenuto conto della (γ), ma è compatibile con questa, abbiamo nella (γ) e nella (δ), assieme considerate, due equazioni indipendenti, risolubili perciò rispetto ad x_1 e ad x_2, ed è chiaro che le forme φ e χ saranno in tal caso equivalenti, soltanto se le espressioni così ottenute per le $\underline{x}$ soddisfaranno alle (α), e che tali espressioni sostituite nelle (21) ci daranno allora l'unica trasformazione, per la quale la φ si cambia identicamente nella χ.

Se la (δ) fosse incompatibile colla (γ), è chiaro che le forme φ e ψ non sarebbero equivalenti.

Rimane da esaminare il caso, in cui la (δ) sia soddisfatta identicamente, per essere $\underline{\rho}$ e (ρ) eguali alla stessa costante, ovvero dipendentemente dalla (γ), per essere

$$\rho = f\{G\} \;, (\rho) = f\{(G)\} \;, \qquad 22)$$

$\underline{f}$ essendo il simbolo di una funzione qualunque. Nel secondo caso dalle (22) si traggono le

$$\rho_r = f'\{G\} \, \rho \, \lambda_r \,; (\rho)_r = f'\{(G)\} \, (\rho) \, (\lambda_r) \qquad 23)$$

Se quindi insieme alle (14,) consideriamo le analo-

gli relative alla forma χ e per questa rappresentiamo con v', γ' e (γ') gli invarianti, che per quella si designano con v, γ e (γ) vediamo che è $\gamma = \gamma' = 0$ e, tenuto conto della equazione (γ), $v = v'$. Queste stesse equazioni sono invece soddisfatte identicamente nel primo caso.

Se ora si considerano anche le equazioni, che si ottengono dalle (δ) ed (ε) con nuove derivazioni, è anzi tutto chiaro, per quanto è già stato stabilito e come risulta ancora dalle (23), che la derivazione della (δ) non conduce a nuove equazioni. Se poi deriviamo le (ε) e mediante le (β) eliminiamo le derivate seconde delle $\underline{x}$, giungiamo alle equazioni, che stabiliscono la natura covariante del sistema λ_{rs}. Per le (7) queste equivalgono a quelle, che stabiliscono la natura covariante del sistema φ_{s}, cioè per le (11), ricordando che è $\gamma = \gamma' = 0$ alla

$$(\gamma) = \gamma \qquad\qquad \eta)$$

Se questa equazione o non è compatibile colle precedenti o, pur essendo compatibile con esse, ne è indipendente possiamo, come sopra, concludere che le forme φ e χ non sono equivalenti, ovvero che esse lo sono se si trasformano l'una nell'altra per la sostituzione definita dalle equazioni (γ) e (η).

In fine, se l'equazione (γ) è soddisfatta o identicamente o tenuto conto della (γ) nel qual caso, indicando con $\mathfrak{F}$ il simbolo di una funzione qualunque, sarà

$$(\gamma) = \mathfrak{F}\{G\}, \quad (\gamma') = \mathfrak{F}\{(G)\}, \qquad 24)$$

risulterà completo il sistema, che comprende le equazioni (α) (β) (γ) ed (ε). Il suo sistema integrale generale conterrà una sola costante arbitraria.[1] In questo caso dunque le forme φ e χ sono equivalenti ed esiste un numero semplicemente infinito di trasformazioni dell'una nell'altra. Le sostituzioni (21), che trasformano la φ nella χ si ottengono tutte integrando il sistema completo testè menzionato.

Se si suppone χ identica a φ, si ha che

"Le forme differenziali quadratiche positive,
" il cui invariante G di Gauss non è costante ma
" tale che, ridotte le sue derivate G_r alle espressioni
" canoniche

$$G_r = \rho\, \lambda_r\,,$$

" ρ risulti funzione soltanto di G e poste ancora le,

---

(1) Per convincersi di ciò conviene osservare che le λ_r e (λ_p) essendo sistemi di invarianti algebrici eguali all'unità le (ε) si riducono essenzialmente ad una sola equazione.

$$\lambda_{rs} = (\gamma)\,\bar{\lambda}_r\,\bar{\lambda}_s\,,$$

„anche (γ) risulti funzione di $\mathcal{G}$ soltanto, sono su„ sccettibili di un numero semplicemente infinito „di trasformazioni in sè stesse. Queste sono date „dalle (21) se in esse x_1 ed x_2 sono sostituiti dalle „funzioni, che si hanno integrando il sistema com„pleto, che comprende le equazioni (α) (β) (γ) ed (ε), „nelle quali le espressioni tra parentesi coincidono „con le corrispondenti fuori di parentesi, conte„nendo però le variabili y_1 ed y_2 al posto delle x_1 ed x_2."

48. Quando siano soddisfatte le condizioni stabilite nel paragrafo precedente, per le quali esiste un numero semplicemente infinito di sostituzioni, che trasformano la forma φ nella χ, la determinazione di tali sostituzioni può ottenersi in modo assai più semplice di quello ivi indicato, poichè, come vedremo, essa può farsi dipendere semplicemente da quadrature.

Si osservi prima di tutto che, come si deduce dalla (14_2) e dal fatto che che per la sostituzione di $(\mathcal{G})$ a $\underline{\mathcal{G}}$ v e (γ) si cambiano rispettivamente in v' e (γ'), per la stessa sostituzione risulta

$$\Delta_2\,\mathcal{G} = \Delta_2\,(\mathcal{G}) \qquad 24)$$

e così pure

$$\Delta_1\,\mathcal{G} = \Delta_1\,(\mathcal{G}), \qquad 25)$$

come si ha dalle (22).

Premesso ciò e posto per commodità

$$(\varphi) = z$$

si indichi con w una funzione qualunque di y_1 ed y_2, purchè indipendente da z, e si conside-rino z e w come associate alla forma χ, che sarà ora considerata come fondamentale.

Fatte ancora le posizioni

$$w_r = \alpha z_r + \beta \overline{z}_r , \qquad 26)$$
$$(r = 1, 2)$$

ne seguono le

$$\overline{w}_r = \alpha \overline{z}_r - \beta z_r , \qquad 26')$$

e da queste per derivazione covariante secondo χ le

$$\overline{w}_{rs} = \alpha \overline{z}_{rs} + \alpha_s \overline{z}_r - \beta z_{rs} - \beta_s z_r$$

Per un teorema del § 42 avendosi

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} \overline{w}_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} \overline{z}_{rs} = 0 ,$$

dalle precedenti otteniamo la identità

$$\beta \underset{2}{\Delta} z + \nabla(\beta z) - \sum_{1}^{2}{}_{r}\, \alpha^{(r)} \overline{z}_r = 0 \qquad 27)$$

Immaginiamo ora in α e β sostituite ad y_1 ed y_2 le loro espressioni per z e w, e si avranno le

$$\alpha_r = \frac{d\alpha}{dz} z_r + \frac{d\alpha}{dw} w_r$$
$$\beta_r = \frac{d\beta}{dz} z_r + \frac{d\beta}{dw} w_r$$

e quindi, tenuto conto anche delle (26)

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \alpha^{(r)} \overline{z}_r = \beta \frac{d\alpha}{dw}$$
$$\nabla(\beta' z) = (\underset{1}{\Delta} z)^2 \frac{d\beta}{dz} + \alpha \frac{d\beta}{dw}$$

La (27) assume dunque la forma

$$\beta \Delta_2 z + (\Delta_1 z)^2 \frac{d\beta}{dz} + \alpha \frac{d\beta}{dw} - \beta \frac{d\alpha}{dw} = 0 \; . \quad 28)$$

Se ora indichiamo con η e ϑ ciò, che divengono rispettivamente α e β per la sostituzione di $\mathcal{G}$ a z e di una indeterminata $\underline{v}$ a w, è chiaro per le (24) e (25) che la (28) si cambia nella

$$\vartheta \, \Delta_2 \, \mathcal{G} + (\Delta_1 \mathcal{G})^2 \frac{d\vartheta}{d\mathcal{G}} + \eta \frac{d\vartheta}{dv} - v \frac{d\eta}{dv} = 0 \quad 29)$$

la quale sarà quindi essa pure identicamente soddisfatta.

Ora si riguardi $\underline{v}$ come una funzione incognita di x_1 ed x_2 e si consideri il sistema di equazioni

$$v_r = \eta \, \mathcal{G}_r + \vartheta \, \overline{\mathcal{G}}_r \quad \text{ts} \qquad 30)$$

Applicando il citato teorema del § 42, si riconosce facilmente che la (29) esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè questo sistema sia completo. Esso ammette dunque un integrale generale v, il quale contiene una costante arbitraria, ed è indipendente da $\underline{\mathcal{G}}$. Infatti, essendo $\underline{w}$ indipendente da z, come si deduce facilmente dalle (26) è β diverso da $\underline{0}$. È dunque anche ϑ diverso da $\underline{0}$ e per le (30), v indipendente da $\mathcal{G}$.

Dimostriamo ora che, se si scelgono come variabili indipendenti per la forma $\underline{\varphi}$, $\mathcal{G}$ e v e, per la $\chi(\underline{\mathcal{G}})$ e $\underline{w}$ le due forme diventano identiche; cioè si trasformano l'una nell'altra per la sostituzio-

ne definita dalle equazioni

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}),\ v = w. \qquad \alpha)$$

Per ciò osserviamo, in generale, che se

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\ a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

è una forma differenziale quadratica qualunque, che si assume come fondamentale, e si prende il parametro differenziale di 1° ordine di una variabile indipendente x_r, ovvero quello misto di due variabili indipendenti x_r ed x_s, si trovano per questi le espressioni:

$$(\Delta_1 x_r)^2 = a^{(rr)},\ \nabla(x_r x_s) = a^{(rs)}$$

$$(r, s = 1, 2, \dots n).$$

Se dunque si conoscono tutti i parametri differenziali di 1° ordine, che si possono formare associando n funzioni indipendenti ad una forma fondamentale ad n variabili si conoscono altresì i coefficienti della forma reciproca di questa e quindi quelli della forma stessa pel caso, in cui quelle funzioni si assumano come variabili indipendenti.

Ora dalle (26), considerando χ come forma fondamentale, ricaviamo le

$$(\Delta_1 w)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\Delta_1 z)^2,\ \nabla w z = \alpha(\Delta_1 z)^2.$$

Considerando anche il $(\Delta_1 z)^2$, noi conosciamo dunque la espressione, che assume χ, quando si scel-

gono come variabili indipendenti z e w.

Considerando invece come forma fondamentale la φ, dalle (30) ricaviamo le

$$(\Delta_1 v)^2 = (\eta^2 + v^2)\ (\Delta_1 \mathcal{G})^2,\ \nabla \mathcal{G} v = \eta (\Delta_1 \mathcal{G})^2,$$

e poichè conosciamo altresì il $(\Delta_1 \mathcal{G})^2$, risulta determinata anche la espressione di φ per le variabili indipendenti $\mathcal{G}$ e v.

È poi chiaro per le cose già dimostrate che la espressione così determinata per φ differisce da quella già determinata per χ unicamente per contenere $\mathcal{G}$ e v rispettivamente al posto di z e di w.

49. Posto, come precedentemente

$$\mathcal{G}_r = \rho \lambda_r$$

ed indicando con φ_r il sistema dedotto dal sistema λ_r, essendo $\gamma = 0$ sarà

$$\varphi_r = (\gamma)\ \overline{\lambda}_r$$

e però

$$\varphi_{rs} = -(\gamma)^2 \lambda_r \overline{\lambda}_s + (\gamma)_s \overline{\lambda}_r$$

Essendo poi (γ) funzione soltanto di $\mathcal{G}$, risulterà

$$(\gamma)_r = \frac{d(\gamma)}{d\mathcal{G}} \rho\ \lambda_r$$

e però

$$\sum_1^2{}_r (\gamma)^r \overline{\lambda}_r = 0$$

e

$$\sum_1^2{}_{rs} a^{(rs)} \varphi_{rs} = 0$$

Pel teorema più volte citato del § 42 possiamo da ciò concludere che esiste una funzione $\mathcal{C}$, per cui valgono le

$$\mathcal{C}_r = \overline{\varphi}_r . \qquad 31)$$

Poniamo

$$v_r = e^{\sigma} \cdot \overline{\lambda}_r . \qquad 32)$$

ed avremo altresì le

$$\overline{v}_r = - e^{\sigma} \lambda_r$$

$$\overline{v}_{rs} = - e^{\sigma} (\overline{\lambda}_r \varphi_s + \lambda_r \overline{\varphi}_s)$$

e quindi la

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} a^{(rs)} \overline{v}_{rs} = 0 ,$$

la quale ci dice che le v_r definite dalle (32) sono le derivate di una funzione $\underline{v}$ rispetto alle x_r.

Per ottenere una tale funzione occorreranno due quadrature, cioè una per ricavare $\underline{\sigma}$ dalle (31) e l'altra per ricavare $\underline{v}$ dalle (32).

Dal confronto delle (31) e (32) segue che $\underline{\sigma}$ è funzione soltanto di $\underline{\mathcal{G}}$ e che quindi le (32) si possono mettere sotto la forma

$$v_r = \psi(\mathcal{G}) \; \overline{\mathcal{G}}_r , \qquad 33)$$

ψ essendo una funzione della sola $\mathcal{G}$. Se dunque la funzione $\underline{v}$ del paragrafo precedente si fa coincidere con quella testè determinata le (26) assumeranno la forma

$$w_r = \psi(z) \, . \, \overline{z}_r ,$$

e da queste con un'altra quadratura si calcolerà w

Concludiamo che la sostituzione (α), per cui le forme φ e χ si trasformano l'una nell'altra, può determinarsi con semplici quadrature.

- -

Si osservi ancora che dalle (33) avendosi $\nabla_1(\mathcal{G} v) = 0$ e

$$(\Delta_1 v)^2 = (\Delta_1 \mathcal{G} \cdot \psi(\mathcal{G}))^2,$$

per le considerazioni esposte nel § 48, posto

$$u = \int \frac{d\mathcal{G}}{\Delta_1 \mathcal{G}}, \quad (\Delta_1 \mathcal{G} \cdot \psi(\mathcal{G})) = \frac{1}{\mathcal{E}(u)}$$

la espressione di φ assumerà la forma

$$\varphi = du^2 + \mathcal{E}(u)\, dv^2,$$

$\mathcal{E}$ essendo una funzione della sola u.

Reciprocamente poichè nei coefficienti di φ ridotti a questa espressione entra la sola variabile u, è chiaro che anche l'invariante $\mathcal{G}$ di Gauss ed il $\Delta_1 \mathcal{G}$ saranno funzioni di u soltanto. Avremo quindi anche $\Delta_1 \mathcal{G}$ funzione soltanto di $\mathcal{G}$, $\gamma = 0$ e (γ) funzione essa pure soltanto di $\mathcal{G}$. Possiamo dunque concludere che

„ Le forme differenziali quadratiche binarie positive suscettibili di un numero semplicemente infinito di trasformazioni in sè stesse sono tutte e soltanto quelle, che possono ridursi ad una espressione del tipo

$$\varphi = du^2 + \mathcal{E}(u)\, dv^2 \text{ „}.$$

Parte Prima

Delle proprietà delle superficie considerate come veli flessibili ed inestendibili.

Capitolo Primo

Dei sistemi di coordinate sopra una superficie qualunque.

Concetto di coordinate pei punti di una superficie. – Linee coordinate. – Esempii di coordinate nel piano e sulle superficie di rotazione. – Cambiamento di coordinate. – Elemento lineare di una superficie in generale. – Esempi. – Elemento lineare delle superficie di rotazione. – Linee di lunghezza nulla.

50. Per solito nella Geometria Analitica i diversi punti di una superficie si considerano come determinati da tre coordinate x, y e z legate fra loro da una equazione

$$f(x\,y\,z) = 0 \qquad 1)$$

Ciò significa essenzialmente questo soltanto che, mentre per rappresentare tutti i punti dello spazio occorrono tre variabili indipendenti per la rappresentazione dei punti di una superficie basta

ino due sole. — Come tali possono assumersi due qualunque delle x, y, z; ma sarà evidentemente più generale il lasciarne del tutto arbitraria la scelta, il che si ottiene considerando x, y e z come funzioni di due variabili indipendenti qualunque u e v. Se

$$x = x(uv), \quad y = y(uv), \quad z = z(uv) \qquad 2)$$

devono essere tali espressioni di x, y e z per u e v che a valori arbitrarî di u e v corrispondano sempre punti della superficie di equazione (1), questa dovrà essere identicamente soddisfatta, quando per x y e z vi si costituiscano le espressioni (2); il che equivale a dire che la (1) deve risultare dalle (2) per la eliminazione di u e v. — È chiaro di più che affinchè ai valori di x, y e z, che provengono dalle (2) per valori arbitrarî dati ad u e v possa corrispondere un punto qualunque della superficie (1) è necessario e sufficiente che la eliminazione di u e v tra le (2) conduca alla sola equazione (1), cioè che la matrice

$$m \equiv \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}$$

non sia identicamente nulla.

51. Si supponga questa condizione soddisfatta. —

Per quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente le equazioni (2) rappresenteranno una superficie, un cui punto qualunque si avrà, dando ad $\underline{u}$ ed a $\underline{v}$ valori arbitrarii. Si supponga invece di dare ad $\underline{u}$ un valore determinato u_0, lasciando $\underline{v}$ affatto arbitraria, e questa si elimini tra le (2). — Otterremo due equazioni tra x, y e z, che conterranno il parametro u_0, e rappresenteranno una linea tracciata sulla superficie (2), linea che sarà il luogo di tutti i punti di questa superficie, pei quali $\underline{u}$ ha il valore stabilito u_0. Se con u_0 si suppongono designati successivamente tutti i valori reali possibili; verremo a considerare sulla superficie (2) un sistema semplicemente infinito di linee caratterizzato dalla proprietà che la $\underline{u}$ varia soltanto da una linea all'altra di un tale sistema; talchè lungo una di tali linee varia soltanto la $\underline{v}$. Chiameremo un tale sistema il sistema delle linee di parametro u o, semplicemente, delle linee u. Analogamente potremo considerare il sistema delle linee di parametro $\underline{v}$, caratterizzato dalla proprietà che lungo una qualunque di esse varia soltanto la $\underline{u}$, mentre la $\underline{v}$ varia solamente al passare da una linea all'altra del sistema.

Si supponga ora di dare contemporaneamente ad u un valore determinato u_0 ed a v un valore pure determinato v_0. Verremo così a considerare soltanto i punti di intersezione di una determinata linea u con una determinata linea v. E se x, y, z saranno funzioni a un sol valore di u e v questi punti si ridurranno ad uno solo; il che ci spiega geometricamente come i punti di una superficie possano farsi corrispondere ai sistemi di valori di due sole variabili indipendenti u e v.

I due sistemi di linee u e v costituiscono quello, che si chiama un sistema di linee coordinate sulle superficie di equazioni (2); esse si chiamano anche, sebbene meno propriamente, coordinate curvilinee della superficie. Noi chiameremo invece coordinate i loro parametri u e v.

52. Abbiamo già degli esempi di questo metodo di determinazione dei punti di una superficie nella Geometria analitica del piano, i cui punti sono determinati per mezzo di due sole coordinate. Oltre alle coordinate cartesiane (x.y), per le quali i sistemi di linee coordinate sono due sistemi di rette parallele; ed alle polari, per cui si hanno come coordinati il sistema dei raggi uscen-

ti da un centro O e quello delle circonferenze concentriche con centro in O, si fa spesso uso anche di un altro sistema doppio di linee coordinate, che ora definiremo. Indicando con x ed y le coordinate cartesiane ortogonali di un punto del piano, con a e b delle costanti reali diverse fra loro, con λ una incognita, si consideri la equazione:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1, \qquad 3)$$

cioè, riducendo a forma intiera, la equazione

$$f(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda) - (b^2+\lambda)x^2 - (a^2+\lambda)y^2 = 0.$$

Si supponga a > b e nel primo membro di questa equazione si ponga successivamente $\lambda = -a^2$. Si trova

$$f(-a^2) = (a^2-b^2)\,x^2 > 0$$
$$f(-b^2) = -(a^2-b^2)\,y^2 < 0$$

e poichè per valori abbastanza grandi di λ è $f(\lambda) > 0$ vediamo che la equazione $f(\lambda) = 0$ ha due radici reali λ_1 e λ_2 per le quali valgono le disuguaglianze

$$-a^2 < \lambda_1 < -b^2 < \lambda_2 . \qquad 4)$$

Ciò equivale a dire che per ogni punto (x y) del piano passano una ellissi ed una iperbole omofocali rispettivamente di equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Dalla identità

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ (\lambda - \lambda_2)$$

facendovi successivamente $\lambda = -a^2$ e $\lambda = -b^2$ ricaviamo le

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda_1)\ (a^2+\lambda_2)}{a^2-b^2} \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda_1)\ (b^2+\lambda_2)}{a^2-b^2}, \end{aligned}\right\} \quad 3')$$

che ci danno x^2 ed y^2 in funzione di λ_1 e λ_2. Siccome esse danno per x ed y valori reali tutte le volte che siano soddisfatte le disuguaglianze (4), e questi valori sono determinati a meno del segno, possiamo concludere che

„Ogni punto di uno dei quattro quadranti, „in cui un piano è diviso da due assi ortogo„nali, può determinarsi mediante la intersezio„ne di una iperbole e di una ellissi omofocali di „sistemi (5)."

Questi costituiscono appunto i sistemi di coordinate nel piano, che risultano di tutte le ellissi e le iperbole, che hanno gli stessi fuochi, sistemi, a cui si accennava sopra; e che sono noti sotto il nome di sistemi di coordinate ellittiche.

53. Consideriamo i punti dello spazio come determinati mediante un sistema di coordinate polari ρ, ϑ e φ. Se ci riferiamo ad un sistema carte-

tesiano ortogonale coll'origine nel polo, coll'asse delle z coincidente coll'asse polare e col piano (xz) coincidente col piano del meridiano iniziale, valgono le formole

$$x = \rho \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi, \quad z = \rho \cos \vartheta \qquad 6)$$

Le superficie di rotazione, assunto come asse polare l'asse di rotazione sono caratterizzate dalla proprietà che ρ non cambia finchè rimane costante l'angolo ϑ; il che equivale a dire che per esse ρ è una funzione della sola ϑ, o meglio della tangente di ϑ, dacchè ϑ deve considerarsi variare soltanto da 0 a π. Se dunque, indicando con f il simbolo di una funzione arbitraria, poniamo nelle (6)

$$\rho = f(\operatorname{tang} \vartheta),$$

queste ci esprimono x, y e z per ϑ e φ, che possono quindi assumersi come coordinate pei punti di una qualunque superficie di rotazione. Basterà tuttavia, per avere tutti i punti di una tale superficie, far variare ϑ da 0 a π e φ da 0 a 2π. Le linee coordinate di parametro ϑ sono i paralleli, cioè le sezioni fatte sulla superficie coi piani normali all'asse di rotazione; e quelle di parametro φ i meridiani, cioè le sezioni fatte coi piani, che passano per il detto asse.

In particolare, se nelle (6) si suppone ρ costante, si hanno le equazioni della sfera di raggio ρ.

54\. Se tutti i punti di una superficie, secondo il metodo esposto nei paragrafi precedenti, sono determinati per mezzo di due coordinate u e v, e, indicando con u_1 e v_1 due nuove variabili si pone

$$u = u(u_1 v_1), \quad v = (u_1 v_1) \qquad 7)$$

i punti della stessa superficie potranno considerarsi come determinati anche per mezzo delle due variabili u_1 e v_1, purchè ad ogni sistema di valori di u e v corrisponda un unico e determinato sistema di valori per u_1 e v_1, e reciprocamente. Per ciò è anzi tutto necessario che u e v siano funzioni indipendenti di u_1 e v_1 o, altrimenti che sia

$$\frac{d(u\,v)}{d(u_1 v_1)} \lessgtr 0.$$

In tal caso le (7) potranno risolversi rispetto ad u_1 e v_1 e, almeno entro certi limiti, ad ogni sistema di valori per u e v corrisponderà un determinato sistema di valori per u_1 e v_1. Le (7) servono quindi, sotto le condizioni indicate, a passare sulla superficie, che si considera, da un sistema di coordinate $(u\,v)$ ad un nuovo sistema $(u_1 v_1)$.

È però da notare che ad un cambiamento di coordinate o di parametri non corrisponde un cambiamento nei sistemi di linee coordinate, se una almeno delle funzioni $\underline{u}$ e $\underline{v}$ non contiene amendue le variabili u_1 e v_1. — Infatti si riconosce facilmente che se le (7) sono della forma $u = u(u_1)$, $v = v(v_1)$, le linee u_1 e v_1 coincidono rispettivamente colle $\underline{u}$ e $\underline{v}$, che cioè si cambiano le coordinate senza cambiare i sistemi di linee coordinate.

55. In seguito per commodità di notazione, indicheremo con y_1, y_2, y_3 le coordinate cartesiane ortogonali dei punti dello spazio. — Se assieme ad un punto qualunque P di coordinate y_1, y_2, y_3 si considera un altro punto P' ad esso vicinissimo e del resto qualunque di coordinate $y_1 + dy_1, y_2 + dy_2, y_3 + dy_3$ e con $\underline{ds}$ si indica la distanza dei due punti P e P', si ha

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_h \, dy_h^2 .$$

Assunto sopra una superficie un sistema di coordinate x_1 ed x_2 siano

$$y_h = y_h(x_1, x_2) \qquad 8)$$

le equazioni di questa e si supponga che amendue i punti P e P' si debbano trovare sulla superfi-

ficie, che consideriamo.

Indicando con $(x_1\ x_2)$ le coordinate del punto P, con x_1+dx_1 ed x_2+dx_2 quelle del punto P', assieme alle (8) varranno le

$$dy_h=\sum_{1}^{2}{}_r \frac{dy_h}{dx_r}\ dx_r$$
$$(h=1,2,3)$$

Posto quindi

$$a_{rs}=\sum_{1}^{3}{}_h \frac{dy_h}{dx_r}\frac{dy_h}{dx_s} \qquad 9)$$
$$(r,s=1,2).$$

ed indicando con <u>ds</u> la distanza di due punti vicinissimi e del resto qualunque della superficie (8), la formola

$$ds^2=\sum_{1}^{2}{}_{rs}\,a_{rs}\,dx_r\,dx_s\ , \qquad 10)$$

esprimerà il quadrato di quella distanza elementare; o, come si dice, dell'elemento lineare della superficie (8).

Come risulta dalle (9) e dalla (10) il quadrato dell'elemento lineare di una superficie è espresso da una forma differenziale quadratica binaria essenzialmente positiva, come è naturale. Reciprocamente dal Capitolo Quarto della Introduzione risulta che ogni forma differenziale quadratica binaria positiva è al più di prima classe, il che equivale a dire che essa rappresenta il qua-

drato dall'elemento lineare di una o più superficie. È anzi chiaro, poichè si tratta di soddisfare ad un sistema di equazioni della forma (9), cioè ad un sistema di tre equazioni simultanee a derivate parziali di 1° ordine con tre funzioni incognite, che esisteranno infinite superficie, il cui elemento lineare elevato al quadrato può assumere come espressione una data forma differenziale quadratica binaria positiva.

56. Diamo come esempi alcune espressioni dei quadrati degli elementi lineari del piano.

1° La espressione del quadrato dell'elemento lineare del piano in coordinate cartesiane (xy) è

$$ds^2 = dx^2 - 2\cos\alpha\, dx\, dx + dy^2,$$

α essendo l'angolo sotto cui si riscontrano gli assi coordinati. In particolare, se gli assi sono ortogonali si ha

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

2° Se nel piano sostituiamo ad un sistema cartesiano ortogonale xy un sistema polare $(\rho\,\vartheta)$ mediante le formole

$$x = \rho\cos v,\quad y = \rho\,\mathrm{sen}\, v,$$

avendosi

$$dx = \cos v\, d\rho - \rho\,\mathrm{sen}\, v\, dv$$

$$dy = \mathrm{sen}\, v\, d\rho + \rho\cos v\, dv,$$

troviamo

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 dv^2$$

3° Alle coordinate cartesiane ortogonali x, y si costituisca un sistema di coordinate ellittiche mediante le formole (5) del § 52. Da queste ricaviamo

$$2\frac{dx}{d\lambda_1} = \frac{x}{a^2+\lambda_1}, \quad 2\frac{dx}{d\lambda_2} = \frac{x}{a^2+\lambda_2}$$

$$2\frac{dy}{d\lambda_1} = \frac{y}{b^2+\lambda_1}, \quad 2\frac{dy}{d\lambda_2} = \frac{y}{b^2+\lambda_2} \quad ;$$

e quindi

$$4\left\{\left(\frac{dx}{d\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda_1}\right)^2\right\} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2}$$

$$4\left(\frac{dx}{d\lambda_1}\frac{dx}{d\lambda_2} + \frac{dy}{d\lambda_1}\frac{dy}{d\lambda_2}\right) = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}$$

$$4\left\{\left(\frac{d}{d\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda_2}\right)^2\right\} = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_2)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_2)^2}$$

Ora sottraendo l'una dall'altra le (5) si riconosce che il 2° membro della seconda tra queste formole è identicamente nullo e se ne conclude che è

$$\frac{dx}{d\lambda_1}\frac{dx}{d\lambda_2} + \frac{dy}{d\lambda_1}\frac{dy}{d\lambda_2} = 0$$

Si osservi poi che la identità

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

si può mettere sotto la forma

$$1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} \quad ,$$

e derivata e facendo poi successivamente $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ se ne ricavano

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)}$$

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_2)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_2)^2} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)}$$

Abbiamo quindi

$$4\left\{\left(\frac{dx}{d\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda_1}\right)^2\right\} = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a^2+\lambda_1)(b_2+\lambda_1)}$$

$$4\left\{\left(\frac{dx}{d\lambda_2}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda_2}\right)^2\right\} = -\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)}$$

e però la espressione del quadrato dell'elemento lineare del piano in coordinate ellittiche è

$$4\,ds^2=(\lambda_1-\lambda_2)\left\{\frac{d\lambda_1^2}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)}-\frac{d\lambda_2^2}{(a^2+\lambda_2)(b_2+\lambda_2)}\right\}$$

57. Dalle (6) indicando con ρ' la derivata di ρ rispetto a ϑ ricaviamo

$$dx=(\rho\cos\vartheta+\rho'\operatorname{sen}\vartheta)\cos\varphi\, d\vartheta-\rho\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi$$

$$dy=(\rho\cos\vartheta+\rho'\operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{sen}\varphi\, d\vartheta+\rho\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dz=-(\rho\operatorname{sen}\vartheta-\rho'\cos\vartheta)\, d\vartheta.$$

La espressione del quadrato dell'elemento lineare delle superficie di rotazione, quando si assumano come coordinate la collatitudine ϑ e la longitudine φ, e quindi come linee coordinate i paralleli ed i meridiani è dunque

$$ds^2=(\rho^2+\rho'^2)\,d\vartheta^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\, d\varphi^2, \qquad 11)$$

nella quale, se

$$\rho=f(\operatorname{tang}\vartheta)$$

è la equazione della superficie in coordinate polari si è posto

$$\rho'=\frac{d\rho}{d\vartheta}.$$

In particolare per il quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio R si ha la espressione

$$ds^2 = R^2(d\vartheta^2 + \mathrm{sen}^2\vartheta\, d\varphi^2).$$

Posto

$$u = \int \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\vartheta, \quad \rho^2 \mathrm{sen}^2\vartheta = \mathcal{E}(u), \quad \varphi = v$$

la (11) assume la forma

$$ds^2 = du^2 + \mathcal{E}(u)\, dv^2.$$

Reciprocamente con una trasformazione inversa il secondo membro di questa può sempre ridursi ad assumere una espressione della forma (11).

Da queste considerazioni e dal § 49 risulta che „Le forme differenziali quadratiche positive, che ammettono un numero semplicemente infinito di trasformazioni in sè stesse sono „tutte e soltanto quelle, che esprimono il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione del resto qualunque."

Le trasformazioni di una superficie di rotazione in se stessa sono, come è evidente, rappresentate geometricamente dalla rotazione della superficie stessa intorno al proprio asse.

58. Ritorniamo alla espressione generale (10) del quadrato dell'elemento lineare di una superficie ed osserviamo che essa si può mettere sotto la forma

$$ds^2 = \frac{1}{a_{22}} \left\{ \sum_1^2{}_r a_{r2}\, dx_r - i\sqrt{a}\, dx_1 \right\} \left\{ \sum_1^2{}_r a_{r2}\, dx_r + i\sqrt{a}\, dx_1 \right\}.$$

Indicando con $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$ dei fattori integranti delle espressioni lineari tra parentesi e ponendo

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, a_{r2}\, dx_r - i\sqrt{a}\, dx_1 = \rho_1\, d\mu, \quad \sum_{1}^{2}{}_{r}\, a_{r2}\, dx_r + i\sqrt{a}\, dx_r = \rho_2\, dv \qquad 12)$$

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{a_{22}} = \mathcal{P},$$

la espressione di ds^2 assume ancora la forma

$$ds^2 = \mathcal{P}\, d\mu\, dv. \qquad i)$$

La arbitrarietà, che si incontra nella determinazione dei fattori integranti $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$ porta soltanto a ciò che invece di μ e di v si possano assumere rispettivamente delle funzioni arbitrarie delle variabili stesse. Da ciò e dalle considerazioni del § 54 risulta che il doppio sistema di linee coordinate μ e v, immaginarie, come risulta dalle (12), per le quali l'elemento lineare di una superficie data assume la forma (i) è unico e determinato. Siccome dalla (i) per μ = costante e per v = costante risulta $ds = 0$, le linee di questi sistemi assumono il nome di linee di lunghezza nulla.

Capitolo Secondo

Generalità sulle congruenze di linee tracciate sopra una superficie.

Rappresentazione analitica di una linea tracciata sopra

una superficie e suo elemento lineare. Elementi lineari delle linee coordinate. Congruenze di linee sopra una superficie e loro sistemi coordinati. Espressione pel coseno dell'angolo, sotto cui si incontrano le linee di due congruenze. Elemento di area di una superficie. Sistemi doppii di congruenze ortogonali. Significato del parametro differenziale di 1° ordine di una funzione. Altra espressione pel coseno dell'angolo sotto cui s'incontrano le linee di due congruenze.

---

59. Se x_1 ed x_2 sono le coordinate dei punti di una superficie, una equazione della forma

$$f(x_1\ x_2) = 0, \qquad 1)$$

rappresenta il luogo dei punti della superficie, le cui coordinate x_1 ed x_2 soddisfanno a quella equazione, cioè una linea tracciata sulla superficie stessa. Infatti se le equazioni di questa sono le:

$$y_h = y_h(x_1\ x_2) \qquad 2)$$
$$(h = 1, 2, 3)$$

e da queste si elimina una delle x mediante la (1), e poi tra le equazioni stesse l'altra x si ottengono due equazioni tra le y_1, y_2, y_3, le quali rappresentano appunto una linea tracciata sulla superficie (2).

Una equazione della forma (1) ci dice che, quan-

do ci limitiamo a considerare i punti di una linea tracciata sopra una superficie in luogo di tutti i punti di questa, ad essi corrispondono i valori di una sola e non più di due variabili indipendenti. Però se come tale possiamo considerare o la x_1, o la x_2 è più generale il lasciarne affatto libera la scelta, considerando tanto x_1 quanto x_2 come funzioni di una sola variabile indipendente t. Se è

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \qquad 3)$$

la (1) dovrà essere soddisfatta, qualunque sia $\underline{t}$, se per x_1 ed x_2 si sostituiscono le espressioni (3), il che equivale a dire che la (1) deve risultare dalla eliminazione di $\underline{t}$ fra le (3).

60. Sia

$$ds^2 = \sum_{1\,rs}^{2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s \qquad 4)$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie considerata, e si voglia quello della linea di equazioni (3), cioè il quadrato della distanza di due punti P e P' vicinissimi e del resto qualunque situati su questa linea. Basta perciò osservare che se le coordinate x_1, x_2 del punto P corrispondono ad un certo valore $\underline{t}$ di $\underline{t}$, quelle del punto P' corrisponderanno al valore $t + dt$, così che assieme alle (3) varranno le

$$dx_1 = x'_1\, dt,\quad dx_2 = x'_2\, dt, \qquad 5)$$

con x'_1 ed x'_2 indicando le derivate prime di x_1 ed x_2 rispetto a t. – La espressione voluta si otterrà quindi dalla (4) ponendovi per x_1, x_2, dx_1 e dx_2 le espressioni date dalle (3) e (5), cioè sarà data dalla formola

$$ds^2 = \sum_1^2{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s \,.\, dt^2,$$

sempre che nelle a_{rs} si intendano sostituite ad x_1 ed x_2 le espressioni date dalle (3).

Le equazioni delle linee coordinate si hanno eguagliando rispettivamente x_1 ed x_2 a delle costanti. Sulle linee x_1 od x_2 abbiamo dunque $dx_1 = 0$ o $dx_2 = 0$ ed indicando con ds_1 e ds_2 i loro elementi lineari sarà

$$ds_1 = \sqrt{a_{22}}\,.\,dx_2,\quad ds_2 = \sqrt{a_{11}}\, dx_1. \qquad 6)$$

Per stabilire i segni da attribuire ai due radicali, che compaiono in queste formole, conveniamo di prendere come direzioni positive delle linee x_1 ed x_2 quelle, secondo cui crescono per le prime il parametro x_2 e per le seconde il parametro x_1. Così ds_1 e ds_2 avranno gli stessi segni di dx_2 e di dx_1 e nelle (6) i radicali dovranno assumersi positivi.

In seguito con $\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{22}}$ e $\sqrt{a}$ intenderemo sempre di designare le radici positive dei simboli sotto

al segno radicale.

61. Sopra una superficie si chiama congruenza di linee un sistema semplicemente infinito di linee tracciate sulla superficie stessa in modo che per ogni punto di questa passi una ed una sola linea del sistema. Come risulta dalle considerazioni generali del paragrafo 2 della introduzione, se x_1 ed x_2 sono le coordinate dei punti di una superficie, una congruenza di linee tracciate sopra di questa può rappresentarsi analiticamente per mezzo di una equazione differenziale della forma

$$dx_1 : dx_2 :: \lambda^{(1)} : \lambda^{(2)}.$$

Noi supporremo come è permesso scelti $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ in modo da soddisfare alla equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} = \sum_{r} \lambda^{(r)} \lambda_r = 1 \qquad 7)$$

e le equazioni precedenti potranno essere sostituite dalle

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{ds} \qquad 8)$$
$$(r = 1, 2)$$

designando con ds il valore positivo, che si ha estraendo la radice dalla (4). Le equazioni in termini finiti della congruenza, di cui si tratta, si avrebbero eguagliando ad una costante arbitraria un integrale qualunque della equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\ \lambda^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0\ .$$

Le equazioni (8) saranno invece dette equazioni differenziali canoniche della congruenza da esse rappresentata. — Per esse viene stabilito anche il senso positivo di ciascuna linea della congruenza, talchè considerando questa come completamente definita soltanto quando sono fissate anche le direzioni positive delle loro linee, si può dire che ad ogni sistema $\lambda^{(r)}$, che soddisfi alla equazione (1), corrisponde sulla superficie φ una congruenza di linee, e ad ogni congruenza di linee tracciate sulla superficie $\underline{\varphi}$ corrisponde un sistema $\lambda^{(r)}$, che soddisfa alla equazione (1).

Il sistema di elementi $\lambda^{(r)}$ è controvariante e per le ragioni esposte sarà detto sistema coordinato controvariante della congruenza rappresentata dalle equazioni canoniche $\lambda^{(r)}$; il suo reciproco rispetto alla forma fondamentale e di elementi λ_r si dirà invece sistema coordinato covariante della congruenza stessa.

Talora poi per brevità chiameremo congruenza λ_r quella, che ha per sistema coordinato covariante il sistema di elementi λ_r; e linee λ_r quelle, che costituiscono una tale congruenza.

62. Indichiamo rispettivamente con $\alpha^{(r)}$ e $\beta^{(r)}$ gli elementi dei sistemi coordinati controvarianti delle congruenze formate dai due sistemi di linee coordinate x_1 ed x_2 assumendo come direzioni positive di tali linee quelle, secondo cui crescono rispettivamente i parametri x_2 ed x_1. — Sulle prime essendo $dx_1 = 0$ e sulle seconde $dx_2 = 0$, ricordando le (6) e le (8) troviamo le espressioni

$$\alpha^{(1)} = 0\,,\quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,,\quad \beta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,,\quad \beta^{(2)} = 0 \qquad 9).$$

Calcolando in secondo luogo gli elementi α_r e β_r dei sistemi coordinati covarianti delle congruenze stesse troviamo ancora le formole

$$\alpha_1 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}}}\,,\quad \alpha_2 = \sqrt{a_{22}}\,,\quad \beta_1 = \sqrt{a_{11}}\,,\quad \beta_2 = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} \qquad 9_1)$$

In terzo luogo calcoliamo gli elementi dei sistemi canonici ortogonali a quelli calcolati sopra e troveremo

$$\bar{\alpha}^{(1)} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a}}\,,\quad \bar{\alpha}^{(2)} = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a.a_{22}}}\,,\quad \bar{\beta}^{(1)} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a.a_{11}}}\,,\quad \bar{\beta}^{(2)} = -\frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a}} \qquad 9')$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}}\,,\quad \bar{\alpha}_2 = 0\,,\quad \bar{\beta}_1 = 0\,,\quad \bar{\beta}_2 = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}}} \qquad 9'_1)$$

63. Data una forma differenziale quadratica positiva

$$\varphi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

chiameremo per brevità superficie φ quella, il cui elemento lineare ds elevato al quadrato ha per espressione φ.

Si abbiano ora sopra una superficie φ due con-

gruenze di linee definite per mezzo delle loro equazioni differenziali canoniche

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{ds}, \; \mu^{(r)} = \frac{\delta x_r}{\delta s}. \qquad 10)$$

Se y_1, y_2, y_3 sono le coordinate cartesiane ortogonali della superficie φ considerata e con $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$; $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ si designano rispettivamente i coseni di direzione delle tangenti alle linee λ_r e μ_r dirette secondo loro sensi positive e riferite a quegli assi, valgono le formole

$$\mathcal{A}_h = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} y_{h|r}, \; \mathcal{B}_h = \sum_{1}^{2}{}_r \mu^{(r)} y_{h|r} \qquad 11)$$

Se quindi si indica con ϑ l'angolo, sotto cui in un punto qualunque $(x_1 x_2)$ della superficie si incontrano le linee delle due congruenze λ_r e μ_r passanti per quel punto, avendo presenti assieme alle (11) le (9) del § 55 si perviene alla formola

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{rs} a_{rs} \lambda^{(r)} \mu^{(s)} \qquad 12)$$

od anche

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} \mu_r = \sum_{1}^{2}{}_r \mu^{(r)} \lambda_r ; \qquad 12')$$

o in fine per le (10)

$$\cos\vartheta = \frac{\sum_{1}^{2}{}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, \delta x_s}{ds\, \delta s}. \qquad 12_1)$$

Le (12) ci danno il significato geometrico dell'invariante che si ottiene, componendo il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee col sistema coordinato controvariante di un' al-

tra congruenza.

64. Serviamoci delle (12) per calcolare il coseno dell'angolo α minore di due retti sotto cui in un punto qualunque di una superficie φ si incontrano le linee coordinate x_1 ed x_2. — Valendoci delle espressioni trovate nel § 62 pei sistemi coordinati delle congruenze di parametri x_1 ed x_2 dalla (12') ricaviamo facilmente

$$\cos\alpha = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \qquad 13)$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \qquad 13')$$

Assumiamo d'ora in avanti come senso positivo delle rotazioni quello, per cui si passa dalla direzione positiva delle linee x_1 a quella delle x_2 descrivendo un angolo minore di due retti. — Con questa convenzione dalle (12) si trae la formola

$$\operatorname{sen}\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_r\, \mu^{(r)}\bar{\lambda}_r\,, \qquad 12_2)$$

che è facile verificare supponendo che le linee λ_r e μ_r coincidano rispettivamente colle x_1 ed x_2 e valendosi delle formole del § 62.

Dalla (13') e dalle (6) scende la formola

$$ds_1\, ds_2 \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{a}\, dx_1\, dx_2\ ;$$

il cui primo membro esprime la misura dell'area piccolissima, che può riguardarsi come pia-

na, compresa fra due linee vicinissime della congruenza di parametro x_1 e due linee vicinissime della congruenza di parametro x_2. Quest'area, che indicheremo con $d\sigma$ si chiama elemento di area di una superficie φ qualunque.

Abbiamo dunque

$$d\sigma = \sqrt{a}\; dx_1\, dx_2$$

In particolare richiamando le formole dei §.52 e 53 vediamo che l'elemento d'area del piano assume per le coordinate polari ed ellittiche rispettivamente le espressioni

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$d\sigma = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\; d\lambda_1\, d\lambda_2}{\sqrt{-(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)}}$$

Per l'elemento d'area delle superficie di rotazione, quando si assumano come coordinate la latitudine ϑ e la longitudine φ abbiamo la espressione

$$d\sigma = \rho \operatorname{sen} \vartheta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\; d\vartheta\, d\varphi \;;$$

e in particolare per la sfera di raggio R

$$d\sigma = R^2 \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \;.$$

65. Le (12°) ci dicono che la condizione necessaria e sufficiente perchè le linee dei due sistemi λ_r e μ_r si incontrino ad angolo retto in ogni punto delle superficie φ è data dalla equazione

$$\sum_1^2{}_r\, \lambda^{(r)} \mu_r = 0$$

Questa assieme alla equazione

$$\sum_{1}^{2} {}_r\, \mu^{(r)} \mu_r = 1 .$$

definisce il sistema μ_r a meno del segno e poichè essa è soddisfatta ponendo $\mu_r = \bar{\lambda}_r$ possiamo concludere che

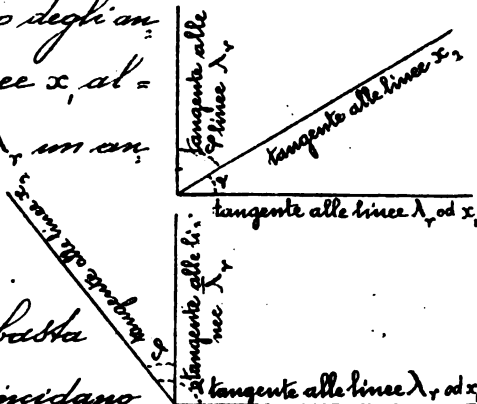
„ Per ogni sistema di linee λ_r esiste uno ed
„ un solo sistema di linee ortogonali ad esse in
„ ogni punto della superficie; cioè quello, che ha
„ come sistema coordinato covariante il siste-
„ ma $\bar{\lambda}_r$ canonico ortogonale al sistema λ_r."

Da ciò la ragione del nome da noi dato al sistema $\bar{\lambda}_r$. Le linee di questo sistema si chiamano traiettorie ortogonali al sistema λ_r e reciprocamente.

Prendendo $\mu_r = \bar{\lambda}_r$ abbiamo stabilita la direzione positiva delle traiettorie ortogonali al sistema λ_r. Ora è facile riconoscere che

„ La direzione positiva delle linee λ_r è tale che
„ assunto come senso positivo degli an-
„ goli quello, che va dalle linee x_1 al-
„ le x_2 le linee $\bar{\lambda}_r$ fanno colle λ_r un an-
„ golo eguale a $\frac{\pi}{2}$, se si va da
„ queste verso quelle."

Per convincersi di ciò basta supporre che le linee λ_r coincidano

tangente alle linee $\bar{\lambda}_r$
tangente alle linee x_2
tangente alle linee λ_r od x_1
tangente alle linee x_2
tangente alle linee $\bar{\lambda}_r$
tangente alle linee λ_r od x_1

colle x_1, nel qual caso abbiamo (§ 62)

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{22}}} \quad ,$$

e, indicando con $\beta^{(r)}$ il sistema coordinato controvariante delle linee x_2

$$\beta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \quad ; \quad \beta^{(2)} = 0 \ .$$

Se dunque indichiamo con $\underline{\alpha}$ l'angolo delle linee x_1 o λ_r colle x_2, con ϑ quello delle linee x_2 colle $\bar{\lambda}_r$ dalle (12') ricaviamo

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \quad ,$$

la quale confrontata colle (13') ci dà

$$\cos\vartheta = \operatorname{sen}\alpha$$

e quindi

$$\vartheta = \pm\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Dalle (13) ricaviamo ancora il seguente teorema

„ Affinchè le linee x_1, x_2 siano ortogonali fra di „ loro sopra una qualunque superficie $\underline{\varphi}$ è necessario e basta che la espressione di φ in coordinate „ $x_1 x_2$ non contenga il prodotto dei differenziali „ di queste variabili cioè che esso sia della forma

$$\varphi \equiv a_{11}\,dx_1^2 + a_{22}\,dx_2^2 . \text{ „}$$

Dalle formole del § 56 risulta in particolare che sul piano sono ortogonali le linee coordinate di un qualunque sistema polare od ellittico; sulle superficie di rotazione i meridiani ed i paralleli.

66. Come sappiamo, il parametro ψ di una congruenza λ_r è dato da un integrale qualunque del-

la equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)}\psi_r = 0 \ ,$$

Avendosi altresì

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)}\overline{\lambda}_r = 0 \ ,$$

sarà

$$\psi_r = \pm \Delta_1 \psi . \overline{\lambda}_r \ . \qquad 14)$$

Si abbia ora un'altra congruenza qualunque μ_r. Dalle (14) e dalle (12) scende la

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \mu^{(r)}\psi_r = \pm \Delta_1 \psi . \text{sen}\, \vartheta , \qquad 15)$$

indicando con ϑ l'angolo, sotto cui in un punto qualunque della superficie si incontrano le linee delle congruenze μ_r e λ_r. Indicando con dx_1 e dx_2 le variazioni, che subiscono le coordinate di un punto qualunque della superficie per uno spostamento infinitesimo di questo nella direzione positiva della linea λ_r, con ds questo spostamento, valgono le

$$\mu^{(r)} = \frac{dx_r}{ds}$$

e quindi si ha

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \mu^{(r)}\psi_r = \frac{d\psi}{ds} \ . \qquad 16)$$

e la (15) si muta nella

$$\frac{d\psi}{ds} = \pm \Delta_1 \psi\, \text{sen}\, \vartheta , \qquad 17)$$

e, se si suppone che la congruenza μ_r coincida colla $\overline{\lambda}_r$

$$\frac{d\psi}{ds} = \pm \Delta_1 \psi \qquad 18)$$

Si osservi ora che il parametro $\Delta_1 \psi$ essendo definito dalla formola

$$(\Delta_1 \psi)^2 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\psi_r \psi_s \ ,$$

il suo segno risulta indeterminato, e si convenga di assumerlo come positivo o come negativo secondo che il parametro ψ delle linee λ_r cresce o decresce per uno spostamento infinitesimo lungo la linea $\overline{\lambda}_r$.

Nella (18) e quindi anche nelle (15) e (17) dovrà prendersi il segno + ed avremo quindi per una congruenza qualunque μ_r.

$$\sum_1^2{}_r\, \mu^{(r)} \psi_r = \underset{1}{\Delta}\, \psi . \mathrm{sen}\, \vartheta \qquad 15_1)$$

e se la congruenza μ_r coincide colla $\overline{\lambda}_r$

$$\frac{d\psi}{dc} = \underset{1}{\Delta}\, \psi . \qquad 18_1)$$

Vediamo così che

„ Il parametro differenziale di 1° ordine di u-
„ na funzione ψ è eguale all'aumento che questa
„ funzione subisce per uno spostamento lungo la tra-
„ iettoria ortogonale alla linea di parametro ψ di-
„ viso per lo spostamento stesso."

Consideriamo ora il parametro $\underset{1}{\Delta}\psi$ come un vettore, la cui direzione coincida con quella della normale positiva alla linea di parametro ψ. Dalla (15$_1$) risulta che

„ L'invariante, che si ottiene componendo il si-
„ stema coordinato controvariante di una congruen-
„ za col sistema delle derivate prime di una fun-
„ zione è eguale alla proiezione del parametro dif-

„ferenziale di 1° ordine di questa sulla linea di quella."

Dalla (16) risulta altresì che

„ L'invariante che si ottiene componendo il si-
„ stema coordinato controvariante di una con-
„ gruenza col sistema delle derivate prime di una
„ funzione è eguale all'aumento, che questa subi-
„ sce per uno spostamento infinitesimo lungo la li-
„ nea della congruenza diviso per lo spostamento
„ stesso."

In fine si considerino due congruenze λ_r e μ_r di parametri ψ e χ. Assieme alla (14), in cui dovrà prendersi il segno +, varrà la

$$\chi_r = \Delta_1 \chi \, \overline{\mu}_r$$

e quindi la

$$\nabla \psi \chi = \Delta_1 \psi \, \Delta_1 \chi \sum_{1}^{2}{}_r \overline{\lambda}^{(r)} \overline{\mu}_r \,,$$

ed essendo

$$\sum_{1}^{2}{}_r \overline{\lambda}^{(r)} \overline{\mu}_r = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} \mu_r = \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{\nabla \psi \chi}{\Delta_1 \psi \, \Delta_1 \chi} \qquad 19)$$

Questa formola ci dà la espressione del coseno del-l'angolo, sotto cui in un punto qualunque di una superficie si incontrano due congruenze di linee definite analiticamente per mezzo dei loro parametri ψ e χ. Ne segue, che

1° „ L'annullarsi del parametro differenziale
„ misto di due funzioni ψ e χ rappresenta la condi-

„zione necessaria e sufficiente perchè le congruen-
„ze di parametri ψ e χ si taglino ad angolo retto
„in ogni punto della superficie, cioè, come si dice,
„siano ortogonali fra di loro."

2° "Data una congruenza per mezzo del suo
„parametro ψ, il parametro χ della congruenza ad
„essa ortogonale è dato da un integrale qualun-
„que della equazione

$$\sum_{1}^{2} {}_r \psi^{(r)} \chi_r = 0 \,. \text{"}$$

Capitolo Terzo

Considerazioni generali sugli invarianti dif-
ferenziali, che possono ottenersi associando al qua-
drato dell'elemento lineare di una superficie il si-
stema coordinato di una congruenza di linee traccia-
to sopra di essa.

Delle superficie considerate come veli flessibili ed ine-
stendibili. Fasci di congruenze e loro sistemi coordinati.
Espressioni delle derivate dell'angolo, sotto cui si incontrano
le congruenze di due fasci. Determinazione di tutti gli inva-
rianti differenziali comuni al quadrato dell'elemento lineare
di una superficie ed al sistema coordinato di una congruenza
e considerazioni generali relative ad essi.

---

67. Si consideri una superficie S come un velo flessibile ed inestendibile di spessore piccolissimo. Potremo distinguere in essa le proprietà, che dipendono dalle forme speciali, che questo velo può assumere flettendosi, e che però variano colle forme stesse; da quelle, che ne sono indipendenti. Tra queste ultime si trovano le distanze di due punti qualunque misurate sempre lungo una stessa linea e in particolare quelle di due punti vicinissimi cioè gli elementi lineari; le aree limitate da determinati contorni e quindi anche gli elementi di area. In generale saranno indipendenti dalle forme, che una superficie può assumere per flessione, tutte quelle proprietà della superficie stessa, che si esprimono unicamente per mezzo dei coefficienti del suo elemento lineare, per esempio l'angolo, sotto cui si tagliano due linee qualunque tracciate sulla superficie, come risulta dalle formole (12) del Capitolo precedente.

È poi chiaro che se fra i punti di due superficie o porzioni di superficie si può stabilire una corrispondenza univoca tale che la distanza di due punti qualunque P e Q misurata lungo una linea L pure qualunque della prima sia eguale al-

la distanza dei punti corrispondenti P_1 e Q_1 della seconda misurata secondo la linea l_1 corrispondente ad l, anche due linee qualunque dell'una si incontreranno sotto lo stesso angolo, sotto cui s'incontrano le linee corrispondenti dell'altra. Perchè le distanze PQ e P_1Q_1 risultino sempre eguali nel senso indicato sopra sarà necessario e sufficiente che esse risultino eguali pel caso che i punti P e Q e per conseguenza i punti P_1 e Q_1 siano vicinissimi, ma dal resto qualunque, cioè dovranno risultare eguali gli elementi lineari delle superficie considerate. In altri termini perchè due superficie possano riguardarsi come due forme differenti di uno stesso velo sottilissimo flessibile ed inestendibile sarà necessario e sufficiente che tra le coordinate dei loro punti si possa stabilire una tale corrispondenza, per cui le forme differenziali quadratiche, che esprimono i quadrati dei loro elementi lineari si trasformino, l'una nell'altra; cioè che le forme stesse siano equivalenti. In tal caso si dice che le due superficie sono applicabili fra di loro, e si intende dire che, come risulta dalle considerazioni esposte sopra, l'una si può stendere sull'altra con semplici flessioni senza alterare le distanze dei punti si-

tnati sulla superficie, sempre che queste si misurino lungo determinate linee tracciate sulla superficie stessa.

Una intiera famiglia di superficie applicabili è dunque caratterizzata dalla forma differenziale quadratica binaria positiva, che esprime il quadrato dell'elemento lineare di una qualunque di esse: e le proprietà di una superficie, che si esprimono analiticamente per mezzo del solo elemento lineare, sono comuni a tutte le superficie ad esse applicabili.

In questa Prima Parte delle Lezioni, ci occuperemo soltanto di tali proprietà.

Intanto notiamo che, come risulta dal § 27 l'annullarsi dell'invariante G di Gauss è condizione necessaria e sufficiente perchè la forma fondamentale sia di classe 0, cioè equivalente alla

$$dy_1^2 + dy_2^2 .$$

E poichè questa è una espressione del quadrato dell'elemento lineare del piano, e le superficie applicabili sul piano si dicono sviluppabili, possiamo concludere che

„ La condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie S sia sviluppabile consiste nel

„ l'annullarsi identicamente dell'invariante G di
„ Gauss della forma, che esprime il quadrato del-
„ l'elemento lineare della superficie S. „

Per le superficie non sviluppabili, G misura in un modo, che sarà precisato altrove, lo scostarsi della superficie in un punto qualunque P dal piano ad essa tangente in quel punto. Per questa ragione l'invariante di Gauss per una forma binaria positiva φ si dice curvatura totale della superficie φ.

68. Nel seguito assumeremo sempre come forma fondamentale la forma

$$\varphi = ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

che nel senso esposto sopra, caratterizza una superficie considerata come velo flessibile ed inestendibile, astrazione fatta dalle diverse forme rigide, che essa può assumere nello spazio. Parlando quindi di sistemi derivati, reciproci e canonici ortogonali gli uni rispetto agli altri etc., intenderemo sempre, anche se non sarà detto esplicitamente, di riferirci alla forma fondamentale φ.

Premesso ciò ricordiamo dal Capitolo Sesto della Introduzione che ogni sistema λ_r di invariante algebrico eguale all'unità dà luogo ad un si-

stema dedotto φ_s definito dalle equazioni

$$\lambda_{rs} = \overline{\lambda}_r \varphi_s \qquad 1)$$
$$(r, s = 1, 2) \quad ,$$

e tale di più che si ha

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} \overline{\varphi}_{rs} = \sqrt{a}\, G \qquad 2)$$

Se poi un sistema φ_s soddisfa a questa condizione, esistono infiniti sistemi semplici di invariante algebrico eguale all'unità, i quali soddisfano alle equazioni (1), e se λ_r è uno di tali sistemi e con α si indica una costante arbitraria, tutti gli altri sono dati dalla formola

$$\lambda'_r = \cos\alpha\, \lambda_r + \operatorname{sen}\alpha\, \overline{\lambda}_r \;.$$

Noi possiamo riguardare il sistema λ_r come il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee tracciate sulle superficie φ. I sistemi λ'_r sono allora, come risulta dalle formole (12) del Capitolo Secondo, i sistemi coordinati delle congruenze, le cui linee tagliano quelle della congruenza λ_r sotto l'angolo costante qualunque α. Se quindi chiamiamo fascio di congruenze l'insieme di tutte le congruenze, in numero semplicemente infinito e tali che le linee di due qualunque di esse si tagliano sotto angolo costante in un punto qualunque di una superficie φ, noi abbiamo

che

1° „Tutti i sistemi coordinati delle congruenze „di uno stesso fascio ammettono lo stesso sistema „dedotto."

2° „Ad ogni sistema semplice covariante φ_s „il quale soddisfi alla equazione (2) corrisponde „un fascio di congruenze, i sistemi coordinati „covarianti delle quali si ottengono integrando „il sistema completo

$$\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1$$
$$\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \varphi_s ;$$

„come reciprocamente ad ogni fascio di congruen„ze corrisponde un sistema φ_s, che soddisfa alla „equazione (2) ed è definito dalle equazioni (1) in „cui con λ_r si designano gli elementi del siste„ma coordinato covariante di una qualun„que congruenza del fascio."

Quando un sistema φ_s soddisfi alla condizione (2), le equazioni (1), a cui si deve sempre intendere associata la $\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1$, definiscono quindi un fascio di congruenze, delle quali esse possono per ciò riguardarsi come la rappresentazione analitica.

Il sistema di elementi φ_s si dirà sistema coordinato covariante del fascio di congruenze rappre-

sentato dalle equazioni (1), come il sistema di elementi $\varphi^{(s)}$ potrebbe dirsi sistema coordinato controvariante del fascio stesso. Talora poi si chiamerà, per brevità, fascio φ_s quello, che ha il sistema di elementi φ_s come sistema coordinato covariante.

Abbiamo dunque che

1° „Il sistema coordinato di un fascio di congruenze non è che il sistema dedotto dal sistema coordinato di una qualunque delle congruenze, che lo costituiscono."

2° „Perchè un sistema φ_s possa riguardarsi come il sistema coordinato covariante di un fascio di congruenze, è necessario e basta che esso soddisfi alla equazione (2)"

69. Calcoliamo le espressioni degli elementi dei sistemi coordinati covarianti dei fasci, cui appartengono le congruenze costituite dalle linee coordinate x_1 ed x_2. Ricordiamo perciò le formole del § 62, che danno i sistemi coordinati di tali congruenze e quelli delle loro traiettorie ortogonali. Indicando gli elementi dei sistemi coordinati covarianti, come ivi si è fatto, con α_r e β_r e ricordando le formole (α_0) del § 23 si trovano dapprima le

$$\alpha_{rs} = \frac{d\alpha_r}{dx_s} - \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\, a_{rs,2} \;;$$

$$\beta_{rs} = \frac{d\beta_r}{dx_s} - \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\, a_{rs,1}$$
$$(r, s = 1, 2)$$

e in particolare le

$$\alpha_{1s} = \frac{a}{a_{22}^{\frac{3}{2}}} \sum_{1\,p}^{2} a^{(1p)} a_{2s,p}$$
$$\alpha_{2s} = 0$$
$$\beta_{1s} = 0$$
$$\beta_{2s} = \frac{a}{a_{11}^{\frac{3}{2}}} \sum_{1\,p}^{2} a^{(2p)} a_{1s,p}$$
$$(s = 1, 2).$$

Indicando poi con φ_s e ψ_s rispettivamente gli elementi dei sistemi coordinati covarianti dei fasci che appartengono le congruenze x_1 ed x_2, dalle formole

$$\varphi_s = \sum_{1\,r}^{2} \bar{\alpha}^{(r)} \alpha_{rs}\,, \quad \psi_s = \sum_{1\,r}^{2} \bar{\beta}^{(r)} \beta_{rs}$$

e da quelle citate del § 62 ricaviamo per tali elementi le espressioni

$$\left.\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{\sqrt{a}}{a_{22}} \sum_{1\,p}^{2} a^{(1p)} a_{2s,p} \\ \psi_s &= -\frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \sum_{1\,p}^{2} a^{(2p)} a_{1s,p}. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Da queste si traggono successivamente le

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(s)} &= \frac{\sqrt{a}}{a_{22}} \sum_{1\,pr}^{2} a^{(1p)} a^{(sr)} a_{2r,p} \\ \psi^{(s)} &= -\frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \sum_{1\,pr}^{2} a^{(2p)} a^{(sr)} a_{1r,p} \end{aligned}\right\} \quad 3')$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi}_s &= \frac{(-1)^{s+1}a}{a_{22}} \sum_{1}^{2}{}_{pr}\, a^{(1p)}a^{(s+1r)}a_{2r,p} \\ \overline{\psi}_s &= \frac{(-1)^{s}a}{a_{11}} \sum_{1}^{2}{}_{pr}\, a^{(2p)}a^{(s+1r)}a_{1r,p}\end{aligned}\right\} \quad 3_1)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi}^{(s)} &= \frac{(-1)^{s+1}}{a_{22}} \sum_{1}^{2}{}_{p}\, a^{(1p)}a_{2\,s+1,p} \\ \overline{\psi}^{(s)} &= \frac{(-1)^{s}}{a_{11}} \sum_{1}^{2}{}_{p}\, a^{(2p)}a_{1\,s+1,p}\end{aligned}\right\} \quad 3_1')$$

Se le coordinate x_1, x_2 sono ortogonali, i fatti φ_s e ψ_s coincidono, e invece delle (3) si hanno le formole

$$\left.\begin{aligned}\varphi_s &= \frac{1}{\sqrt{a}}\, a_{2s,1} \\ \varphi^{(s)} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\, \frac{a_{2s,1}}{a_{ss}} \\ \overline{\varphi}_s &= (-1)^{s+1} \frac{a_{2s+1,1}}{a_{s+1\,s+1}} \\ \overline{\varphi}^{(s)} &= (-1)^{s+1} \frac{a_{2s+1,1}}{a}\end{aligned}\right\} \quad 3_2)$$

70. Consideriamo insieme due congruenze qualunque λ_r e μ_r e indichiamo con φ_s e ψ_s gli elementi dei sistemi dedotti dai loro sistemi coordinati covarianti. Insieme alle (1) varranno le

$$\mu_{rs} = \overline{\mu}_r\, \psi_s . \qquad 1')$$

Ricordiamo poi dal Capitolo Secondo che, assunte come positive le rotazioni, che vanno dalla direzione positiva della linea x_1 a quella della linea x_2, e designando con ϑ l'angolo[1] che le linee μ_r fanno col

---

(1) In generale per angolo, che una linea $\underline{\lambda}'$ fa con una linea $\underline{\lambda}$ intenderemo d'ora in avanti l'angolo, che bisogna

le λ_r si hanno le formole

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_r \mu^{(r)}\lambda_r , \quad \operatorname{sen}\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_r \mu^{(r)}\overline{\lambda}_r \qquad 4)$$

e quindi anche le equivalenti

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_r \overline{\mu}^{(r)}\overline{\lambda}_r , \quad \operatorname{sen}\vartheta = -\sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)}\overline{\mu}_r . \qquad 4')$$

Derivando una qualunque di queste, ricordando le (1) ed (1') e valendosi poi ancora delle (4) e (4') si giunge alle

$$\vartheta_s = \psi_s - \varphi_s \qquad 5)$$

Abbiamo dunque che

„ Se φ_s e ψ_s sono i sistemi coordinati covarianti di due fasci di congruenze, l'angolo, che le linee di una congruenza del fascio ψ_s fanno con quelle di una congruenza del fascio φ_s, ha per derivate le differenze $\varphi_s - \psi_s$."

Risulta pure dalle (5) che indicando con μ_r gli elementi del sistema coordinato covariante di una congruenza di linee e con ψ_s quelli del sistema da esso dedotto, per determinare tutte le congruenze di un fascio, di cui è dato il sistema coordinato covariante φ_s, basta integrare invece del sistema (1) il sistema (5), che richiede per essere integrato sol.

descrivere per passare dalla direzione positiva di questa alla direzione positiva di quella.

tanto quadrature. Determinato così ϑ, che conterrà una costante arbitraria additiva, i sistemi coordinati delle congruenze cercate saranno dati dalle formole

$$\lambda_r = \cos\vartheta\,\mu_r - \operatorname{sen}\vartheta\,\bar{\mu}_r : \qquad 4)$$

71. Dalla teoria generale svolta nel capitolo sesto della Introduzione, risultano i seguenti teoremi relativi agli invarianti, che si possono ottenere associando alla espressione del quadrato dell'elemento lineare di una superficie il sistema coordinato covariante λ_r di una congruenza di linee tracciate sulla superficie stessa.

1° Esiste un solo invariante assoluto algebrico, cioè l'invariante $\sum_{1}^{2} {}_r \lambda^{(r)}\lambda_r$ identicamente eguale all'unità.

2° Tutti gli invarianti assoluti di 1° ordine si ottengono determinando gli invarianti algebrici comuni al sistema λ_r ed al sistema φ_r da esso dedotto.

Facendo ancora le posizioni

$$\varphi_r = \gamma\,\lambda_r + (\gamma)\,\bar{\lambda}_r \qquad 6)$$

si hanno così gli invarianti

$$\gamma = \sum_{1}^{2} {}_r \lambda^{(r)}\varphi_r\,, \quad \rho^2 = \sum_{1}^{2} {}_r \varphi^{(r)}\varphi_r\,. \qquad 7)$$

Però dalle (6) risulta la

$$\rho^2 = \gamma^2 + (\gamma)^2, \qquad 8)$$

per la quale alla considerazione dell'invariante $\underline{\rho}$ può sostituirsi quella dell'altro

$$(\gamma) = \sum_{1}^{2} {}_r\, \varphi^{(r)} \bar{\lambda}_r$$

3°. Per avere gli invarianti di 2° ordine dovremo, oltre l'invariante $\underline{G}$ proprio della forma fondamentale, considerare insieme ai sistemi λ_r e φ_r anche il 1° sistema derivato da questo secondo φ, di elementi φ_{rs}. Avendo però presente che la (2) equivale alla

$$\varphi_{21} - \varphi_{12} = \sqrt{a} \, . \, G \, ,$$

basterà per ottenere tutti gli altri invarianti fino al 2° ordine determinare gli invarianti algebrici comuni alla forma fondamentale, ai sistemi semplici λ_r e φ_r ed al sistema doppio simmetrico di elementi

$$\Phi_{rs} = \frac{\varphi_{rs} + \varphi_{sr}}{2} \qquad 9)$$

4°. Per ottenere gli invarianti assoluti fino ad un ordine qualunque $m > 2$ basterà determinare gli invarianti algebrici comuni alla forma fondamentale, ai sistemi semplici λ_r e φ_r, al sistema doppio Φ_{rs} ed ai sistemi covarianti che si possono dedurre da questo e dall'invariante di Gauss con $m-2$ derivazioni covarianti successive secondo φ.

È poi chiaro che gli invarianti, di cui ci occupiamo, riguardano in generale le proprietà geometri-

che, le quali in particolare si riferiranno alla congruenza λ_r, se, come gli invarianti γ e (γ), contengano esplicitamente gli elementi del suo sistema coordinato; al fascio φ_r, cui la congruenza λ_r appartiene, se, come g, contengono gli elementi dei sistemi φ_r, φ_{rs} e dei sistemi derivati da quest'ultimo senza contenere esplicitamente gli elementi λ_r; infine gli invarianti stessi si riferiranno a proprietà geometriche della superficie φ se, come $G, \Delta_1 G, \Delta_2 G$ ecc., conterranno, oltre ai coefficienti della forma fondamentale, soltanto l'invariante di Gauss e gli elementi $G_r, G_{rs}, \ldots$ dei sistemi derivati da questo.

I capitoli seguenti di questa prima Parte avranno per oggetto la interpretazione geometrica dei principali tra gli invarianti fin qui enumerati.

Capitolo Quarto

Delle congruenze di linee geodetiche e di linee parallele.

Definizione delle linee geodetiche. Congruenze geodetiche e diverse forme della loro equazione differenziale. Conseguenze, che se ne traggono. Equazione delle congruenze di linee parallele. Curvatura geodetica delle linee di una congruenza. Curvatura linea di curvatura di un fascio di congruenze. Fasci di con-

gruenze che comprendono una congruenza di linee geodetiche. Cerchi geodetici. – Triangoli geodetici. – Teorema di Gauss nella curvatura totale di un triangolo geodetico. – Significato geometrico dell'invariante di Gauss. – Sistemi di ellissi ed iperboli geodetiche.

---

72. Data una congruenza di linee λ_r, lungo una qualunque di queste le variabili x_1 ed x_2 sono funzioni di una sola variabile indipendente t e la espressione del quadrato del suo elemento lineare assume la forma

$$ds^2 = \sum_{rs}^{2} a_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt} . dt^2$$

L'integrale

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_{rs}^{2} a_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt}} \, dt$$

rappresenta la lunghezza dell'arco s della linea considerata compreso tra i punti P_0 e P, che corrispondono ai valori t_0 e t della variabile indipendente.

Da ciò e da un teorema dimostrato nella introduzione (§ 25) risulta che affinchè l'arco s sia minimo in confronto degli altri tracciati sulla superficie e congiungente gli stessi punti P_0 e P, debbono essere soddisfatte le equazioni

$$\sum_{s}^{2} \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = 0 \qquad 9)$$

che per le (7) del Capitolo Terzo si riducono ad una sola, cioè alla

$$\gamma = 0 \qquad 9_1)$$

Soddisfatta questa equazione, dalle (1) e (6) di quel Capitolo deduciamo le

$$\lambda_{rs} = (\gamma)\,\overline{\lambda}_r\,\overline{\lambda}_s = \lambda_{sr}, \qquad 9_2)$$

le quali ci dicono che le λ_r sono le derivate rispetto alle x_r di una funzione λ, il cui parametro differenziale di 1° ordine coinciderà coll'invariante algebrico del sistema di elementi λ_r e sarà quindi eguale all'unità. Adottiamo sulle superficie φ come linee coordinate quelle della congruenza di parametro λ, ponendo $\lambda = x_1$; e le loro traiettorie ortogonali.

Avremo $a_{12} = 0$, $a = a_{11} \cdot a_{22}$

$$(\Delta_1 x_1)^2 = \frac{1}{a_{11}}$$

e quindi

$$a_{11} = 1 .$$

Ponendo ancora

$$a_{22} = \mathcal{H}^2,$$

avremo dunque

$$ds^2 = dx_1^2 + \mathcal{H}^2 dx_2^2 . \qquad A)$$

La congruenza λ_r ha per parametro x_2 e però per l'elemento lineare delle linee x_2 varrà la espressione

$$ds = d\,x_1 \;,$$

e, indicando con λ_0 e λ i valori di x_1, cioè di λ, nei punti P_0 e P si avrà

$$s = \lambda - \lambda_0 \qquad 1)$$

Per ogni altra linea di equazione

$$x_2 = x_2(x_1),$$

che congiunga sulla superficie φ gli stessi punti $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$ si avrà invece

$$ds^2 = \left\{ 1 + \left(\mathcal{H} \frac{dx_2}{dx_1} \right)^2 \right\} dx_1^2;$$

e quindi la formola

$$s = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{1 + \left(\mathcal{H} \frac{dx_2}{dx_1} \right)^2} \, dx_1 \quad ,$$

la quale, finchè la funzione   sia finita e determinata, ci dà evidentemente per $\underline{s}$ un valore maggiore di quello dato dalla (1). Perchè dunque la linea λ_r sia la più breve congiungente sulla superficie φ i due punti $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}$ converrà che questi siano abbastanza vicini.

Le linee tracciate sopra una superficie e dotate della proprietà di misurare per due dei loro punti, purchè abbastanza vicini, la minima distanza, che li separa sulla superficie stessa, si chiamano geodetiche. Chiameremo poi congruenze geodetiche quelle, che risultano di linee geodetiche, e però

„ Le equazioni (9), che sostanzialmente si riducono ad una sola, esprimono la condizione „ necessaria e sufficiente perchè la congruenza λ_r „ sia geodetica. Esse possono essere sostituite dalla (9_1) o dalle (9_2). „

La (9_1) e le (9_2) contengono poi i seguenti teoremi:

1.° „L'annullarsi dell'invariante, che si ottiene
„componendo il sistema coordinato covariante
„di una congruenza col reciproco del sistema da
„esso dedotto esprime la condizione necessaria e
„sufficiente perchè la congruenza sia geodetica.

2.° „Perchè una congruenza sia geodetica è ne-
„cessario e basta che il suo sistema coordinato
„covariante risulti delle derivate di una funzio-
„ne λ rispetto alle x_r."

Dalla (1) risulta altresì che

3.° „Verificata questa condizione, le traiettorie or-
„togonali delle linee della congruenza λ_r sono tali
„che la distanza di due qualunque di esse misu-
„rata lungo una geodetica è costante ed eguale
„alla differenza dei valori, che λ assume sopra
„di esse."

Per questa ragione le traiettorie ortogona-
li alle linee di una congruenza geodetica si di-
cono geodeticamente parallele o semplicemente pa-
rallele sulla superficie φ.

Perchè una congruenza λ_r risulti di linee
parallele è evidentemente, necessario e basta che
quella delle sue traiettorie ortogonali sia geo-
detica. Perciò poi, come risulta da un teorema
dimostrato sopra è necessario e basta che si an-

nulli l'invariante (γ). Abbiamo dunque che:

„ La equazione $(\gamma) = 0$ rappresenta la condizio„ne necessaria e sufficiente perchè le linee della con„gruenza λ_r siano parallele."

O altrimenti:

„ La condizione necessaria e sufficiente per„chè una congruenza risulti di linee parallele „è data dall'annullarsi dell'invariante, che si „ottiene componendo il sistema canonico orto„gonale al sistema coordinato covariante del„la congruenza, col sistema reciproco di quel„lo da esso dedotto."

73. Richiamiamo le formole (5) del Capitolo Terzo e come ivi siano φ_s e ψ_s gli elementi dei sistemi dedotti dai sistemi coordinati covarianti di due congruenze λ_r e μ_r, ϑ l'angolo che le linee μ_r fanno colle λ_r. Indicando con ds l'elemento delle linee λ_r, avremo (§ 66) $\sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \vartheta_r = \frac{d\vartheta}{ds}$ e però dalle formole citate si trarrà la

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \sum_1^2 {}_r \lambda^{(r)} \psi_r - \gamma \qquad 2)$$

ovvero, per le (4) del § 70,

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \cos\vartheta \sum_1^2 {}_r \mu^{(r)} \psi_r - \operatorname{sen}\vartheta \sum_1^2 {}_r \bar{\mu}^{(r)} \psi_r - \gamma \qquad 3)$$

La equazione delle congruenze geodetiche si può dunque mettere altresì sotto una delle forme

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\sum_{1}^{2}{}_{r}\,\lambda^{(r)}\psi_r \qquad g_3)$$

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\cos\vartheta\sum_{1}^{2}{}_{r}\,\mu^{(r)}\psi_r-\operatorname{sen}\vartheta\sum_{1}^{2}{}_{r}\,\mu^{(r)}\psi_s \qquad g_4),$$

essendo ϑ l'angolo, che le linee di una congruenza qualunque μ_r appartenente al fascio ψ_r fanno con quelle della congruenza geodetica λ_r; ds l'elemento lineare di queste.

L'integrale generale della equazione (g_3) o (g_4) contiene una costante arbitraria, che può sceglier si in modo che ϑ assuma un valore iniziale arbitrario. Possiamo quindi concludere che

„ Sopra ogni superficie esiste un numero sem„plicemente infinito di congruenze geodetiche, „e tra esse ve n'ha sempre una tale, che la linea „ad essa appartenente e che passa per un dato pun„to P ha in questo una direzione prestabilita qua„lunque."

Siccome poi ogni congruenza risulta di un numero semplicemente infinito di linee e comprende una linea, che passa per un qualsivoglia punto della superficie, così dal teorema precedente segue che

„ Sopra ogni superficie esiste una infinità „doppia di linee geodetiche e questa infinità

„è tale che esiste una geodetica la quale passa per „un punto P della superficie dato ad arbitrio con „una direzione pure arbitraria."

74. Nella (g_3) facciamo coincidere la congruenza μ_r con quella delle linee coordinate x_2. Valendosi delle espressioni delle ψ_3 date dalle (3) del Capitolo Terzo vediamo che la (g_3) assume la forma

$$d\vartheta = -\frac{\sqrt{a}}{a_{11}} \sum_{1\,pr}^{2} a^{(2p)} a_{1r,p}\, dx_r \;; \qquad g_5)$$

nella quale ϑ rappresenta l'angolo, che la linea x_2 fa colla geodetica, riguardando sempre come senso positivo delle rotazioni quello, che va dalla direzione positiva delle linee x_1 a quella delle linee x_2; ovvero l'angolo, che la geodetica fa colla linea x_2, considerando come positive le rotazioni dalle linee x_2 verso le x_1. La (g_5), astrazion fatta dalle notazioni, coincide colla equazione delle geodetiche sotto la forma datale da Gauss. Se le coordinate sono ortogonali essa assume la forma

$$d\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{r}^{2} a_{1r,2}\, dx_r \,, \qquad g_5')$$

Se il quadrato dell'elemento lineare della superficie è ridotto alla espressioni (A) si ha in particolare

$$d\vartheta = -\frac{dH}{dx}\, dx_2 \qquad g_5'')\,.$$

75. Riprendiamo ora la formola (3) ed in essa sup-

poniamo la congruenza μ_r geodetica e la λ_r qualunque: Essa assumerà la forma

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\operatorname{sen}\vartheta \sum_{1\,r}^{2} \bar{\mu}^{(r)}\psi_r - \gamma.$$

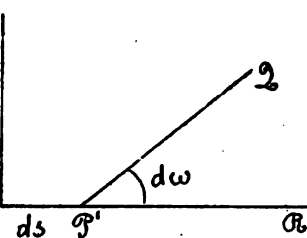
Se supponiamo di più che in un determinato punto P la linea della congruenza λ_r e la geodetica μ_r abbiano la tangente comune, dalla formola precedente ricaviamo che in quel punto è

$$\gamma = -\frac{d\vartheta}{ds}$$

Questa formola ci fornisce il significato geometrico dell'invariante $\underline{\gamma}$. Ricordando infatti che l'angolo ϑ è quello che fanno le linee della congruen. λ_r con quelle della congruenza μ_r, vediamo che

„L'invariante che si ottiene componendo „il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee col reciproco del sistema da „esso dedotto misura in ogni punto P della superficie φ il rapporto tra l'angolo, che la linea della congruenza passante per P e la geodetica ad essa tangente in questo punto fanno nel punto P' „vicinissimo a P situato nella stessa linea alla „distanza $\underline{ds}$ e questa distanza; sempre che si „passi dal punto $\underline{P}$ al punto P' movendosi nella „direzione positiva della linea. Questo rapporto prende il nome di curvatura geodetica della linea nel punto P.

Se ricordiamo (§ 65) che la direzione positiva delle rotazioni coincide con quella che va dalla direzione positiva delle linee λ_r a quella delle $\bar{\lambda}_r$ riconosciamo facilmente che in un punto qualunque di una linea λ_r la curvatura geodetica è positiva o negativa, secondo che in quel punto la linea λ_r rivolge la concavità o la convessità verso la direzione positiva della linea $\bar{\lambda}_r$. Basta perciò guardare la figura, nella quale con PP', P'Q si rappresentano le tangenti alla linea λ_r nei due punti successivi P e P'; con PS la tangente alla linea $\bar{\lambda}_r$ nel punto P. La P'R rappresenta allora la direzione della geodetica tangente in P e λ è PP' = ds e posto RP'Q = $d\omega$ è $\gamma = \frac{d\omega}{ds}$

La figura si riferisce al caso in cui la curvatura geodetica è positiva; ma è evidente come essa risulterebbe modificata nel caso opposto.

76. Poichè l'invariante (γ) risulta dalla composizione del sistema $\bar{\lambda}_r$ col sistema φ_r da esso dedotto, esso misurerà la curvatura geodetica della linea $\bar{\lambda}_r$ nel punto qualunque P, sempre che questa si assuma come positiva o come negativa, secondo che la linea λ_r nel punto P rivolge la convessità o la

concavità verso la linea λ_r, dacchè sappiamo che il sistema canonico ortogonale rispetto a quello di elementi $\overline{\lambda}_r$ ha gli elementi $-\lambda_r$. Per consegui-re maggiore unità nelle formole e semplici-tà negli enunciati di alcuni teoremi, che pre-sto seguiremo, verrà qui adottata questa con-venzione in vece della opposta comunemente in uso. Converrà quindi avere presente che la curvatura geodetica delle linee $\overline{\lambda}_r$ come vie-ne definita nei trattati è rappresentata anzi-chè dall'invariante (γ) dall'invariante stesso cam-biato di segno.

Si ha poi il teorema

„ Per un fascio di congruenze la somma dei „ quadrati delle curvature geodetiche delle li-„ nee di due congruenze ortogonali qualun-„ que è costante intorno ad un medesimo punto."

Risulta infatti dalla formola (8) del Capi-tolo Terzo che quella somma è sempre egua-le all'invariante $\sum_{1}^{2} {}_{r}\, \varphi^{(r)}\varphi_r$, indicando con φ_r il si-stema coordinato covariante del fascio.

77. Indichiamo con γ_1 e γ_2 le curvature geodetiche rispettivamente delle linee coordinate x_1 ed x_2; e per trovarne le espressioni facciamo uso delle for-mole (7) del Capitolo Terzo, sostituendovi per gli

elementi dei sistemi coordinati delle congruenze x_1 ed x_2 e dei sistemi da essi dedotti le espressioni fornite dai § 62 e 69. Noi troviamo così

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\sqrt{a}}{a_{22}^{\frac{3}{2}}} \sum_{1}^{2}{}_p \, a^{(1p)} a_{22,p} \\ \gamma_2 &= -\frac{\sqrt{a}}{a_{11}^{\frac{3}{2}}} \sum_{1}^{2}{}_p \, a^{(2p)} a_{11,p} \, , \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

e, se le coordinate x_1, x_2 sono ortogonali,

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{d \log \sqrt{a_{22}}}{d x_1} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{d \log \sqrt{a_{11}}}{d x_2} \end{aligned}\right\} \quad 4_1)$$

78. Determiniamo ora le espressioni delle curvature geodetiche, delle linee di una congruenza e delle sue traiettorie ortogonali, nel caso che la congruenza sia data mediante la sua equazione in termini finiti $\psi = c$. — Serviamoci perciò delle (14) del Capitolo Secondo, in cui, come sappiamo, deve scegliersi il segno $+$. Mediante derivazione covariante secondo φ, posto

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\Delta_1 \psi},$$

ne scendono le

$$-\lambda_r \varphi_s = \mathcal{H} \psi_{rs} + \mathcal{H}_s \psi_r$$

e da queste prima di tutto la espressione cercata per γ, cioè

$$\gamma = -\mathcal{H} \Delta_2 \psi - \nabla(\mathcal{H} \psi). \quad 5)$$

Ne ricaviamo altresì le

$$-\varphi_s = \mathcal{H}\sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)}\psi_{rs}$$

e quindi ricordando ancora che il sistema di elementi ψ_{rs} è simmetrico

$$(\gamma) = -\mathcal{H}\sum_{1}^{2}{}_{rs} \bar{\lambda}^{(r)}\lambda^{(s)}\psi_{rs}$$

E poichè dalle formole citate si trae la

$$\sum_{1}^{2}{}_r \bar{\lambda}^{(r)}\psi_r = \Delta_1 \psi$$

e da questa le

$$(\Delta_1\psi)_s = \sum_{1}^{2}{}_r \bar{\lambda}^{(r)}\psi_{rs},$$

risulterà

$$(\gamma) = -\sum_{1}^{2}{}_s \lambda^{(s)}(\Delta_1\psi)_s,$$

cioè

$$(\gamma) = -\frac{d\Delta_1\psi}{ds}, \qquad 6)$$

indicando con ds l'elemento lineare delle linee λ_r. Dalle (5) e (6) segue che le equazioni delle congruenze geodetiche e delle congruenze di linee parallele assumono rispettivamente le forme

$$\mathcal{H}\,\Delta_2\psi + \nabla(\mathcal{H}\psi) = 0 \qquad 7)$$

$$\frac{d\Delta_1\psi}{ds} = 0 \qquad 8)$$

Quest'ultima ci dice che

„ Affinchè una congruenza di parametro ψ risulti di linee parallele è necessario e basta che il „ parametro differenziale di 1° ordine di ψ sia funzione della sola ψ."

79. Supponiamo che la superficie φ sia sviluppabile

e la espressione del quadrato del suo elemento lineare ridotta alla forma canonica

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = \varphi$$

Di più per maggior chiarezza, assumiamo co=me superficie φ un piano, per cui x_1 ed x_2 rap=presentano un sistema di coordinate carte=siane ortogonali.— Come è chiaro i simboli di Christoffel saranno identicamente nulli e la formola (α_0) del § 23 assumerà la forma

$$\lambda_{rt} = \frac{d\lambda_r}{dx_t}.$$

Essendo di più

$$\lambda^{(t)} = \frac{dx_t}{ds}, \qquad 9)$$

le equazioni (g) assumeranno la forma

$$\frac{d\lambda_r}{ds} = 0 ,$$

con ds rappresentando l'elemento lineare delle linee della congruenza λ_r. Essendo in questo ca=so $\lambda^{(r)} = \lambda_r$, la equazione precedente delle linee geo=detiche nel piano riferito ad un sistema di coor=dinate cartesiane ortogonali assumerà la forma

$$\frac{d\lambda^{(r)}}{ds} = 0$$

E poichè, come risulta dalle (9), gli elementi $\lambda^{(r)}$ non sono che i coseni di direzione delle linee λ_r rispetto agli assi x_r, ne concludiamo che per le geodetiche questi coseni sono costanti, e però le

congruenze geodetiche nel piano sono tutte e soltanto quelle, che risultano di linee rette. — In altri termini ritroviamo la verità già nota fin dalla Geometria Elementare, che nel piano le rette e le rette soltanto sono geodetiche. — Ne segue che sopra una qualunque superficie sviluppabile, le geodetiche sono tutte e soltanto quelle linee, le quali si trasformano in rette, quando la superficie venga distesa sul piano, cioè, come si dice, le deformate delle rette.

80. Se γ e (γ) sono le curvature geodetiche delle linee di due congruenze ortogonali λ_r e $\overline{\lambda}_r$, ds e δs gli elementi lineari delle linee stesse e coi segni $\underline{d}$ e δ si rappresentano le variazioni di una funzione qualunque di $x_1\, x_2$ per spostamenti positivi infinitesimi del punto di coordinate $(x_1\, x_2)$ lungo le linee λ_r e $\overline{\lambda}_r$, abbiamo (§ 66)

$$\sum_1^2{}_r (\gamma)^{(r)} \lambda_r = \frac{d(\gamma)}{ds}, \sum_1^2{}_r \gamma^{(r)} \overline{\lambda}_r = \frac{\delta \gamma}{\delta s}$$

La formola (15) del Capitolo Sesto della Introduzione assume quindi la forma

$$\frac{d(\gamma)}{ds} - \frac{\delta \gamma}{\delta s} + \gamma^2 + (\gamma)^2 + \mathcal{G} = 0 \qquad \mathcal{L})$$

sotto la quale essa fu data la prima volta da Liouville.

Essa è importantissima, perchè ci dà una

interpretazione geometrica dell'invariante di Gauss desunta da soli elementi relativi alla superficie φ considerata come velo flessibile ed inestendibile, esclusa ogni considerazione collegata collo spazio. Essa ci dice di più che la espressione

$$\frac{d(\gamma)}{ds} - \frac{\delta\gamma}{\delta s} + \gamma^2 + (\gamma)^2$$

è costante per uno stesso punto, qualunque sia il sistema doppio ortogonale $\lambda_r, \overline{\lambda}_r$ di linee passanti per quel punto. - Se si ricorda poi dal § 75 che la somma $\gamma^2 + (\gamma)^2$ è costante per uno stesso punto e per due congruenze ortogonali appartenenti allo stesso fascio, la ($\mathcal{L}$) ci dice ancora che la stessa proprietà spetta alla differenza

$$\frac{d(\gamma)}{ds} - \frac{\delta\gamma}{\delta s}.$$

81. Se le linee λ_r sono geodetiche la formola ($\mathcal{L}$) ci dà la

$$\frac{d(\gamma)}{ds} + (\gamma)^2 + \mathcal{G} = 0. \qquad \mathcal{L}')$$

Assumiamo ora come linee coordinate le linee λ_r e le loro traiettorie ortogonali e per parametro di queste la funzione $\underline{\lambda}$, che ha per derivate le λ_r. Posto $\lambda = x_1$, il quadrato dell'elemento lineare assumerà la espressione ($\mathcal{A}$) del § 72 e per la ($\mathcal{A}_1$) (osservando che per questa il senso delle ro-

tazioni va dalle linee x_1 alle x_2, mentre per noi va dalle λ_r alle $\overline{\lambda}_r$ cioè dalle x_2 alle x_1 e quindi il segno deve essere cambiato):

$$(\gamma) = \frac{d \log \mathcal{H}}{dx_1}$$

Essendo poi $ds = dx_1$ e quindi

$$\frac{d(\gamma)}{ds} = \frac{d^2 \log \mathcal{H}}{dx_1^2} = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dx_1^2} - \left(\frac{d \log \mathcal{H}}{dx_1}\right)^2$$

la $(\mathcal{L}')$ ci dà la formola

$$G = -\frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d^2 \mathcal{H}}{dx_1^2}, \qquad 10)$$

della quale ci varremo più avanti.

82. Perchè tutte le congruenze di un fascio φ_r siano geodetiche, scelte nel fascio due congruenze ortogonali λ_r e $\overline{\lambda}_r$ dovrà essere $\gamma = (\gamma) = 0$; come reciprocamente, verificate queste condizioni, tutte le congruenze del fascio saranno geodetiche, poichè in tal caso il sistema coordinato del fascio sarà identicamente nullo.

Da ciò, dalla formola di Liouville e dalle considerazioni svolte nel § 74 risulta che

1° Nelle superficie non sviluppabili non esistono fasci, le cui congruenze siano tutte geodetiche.

2° Tutte le geodetiche del piano costituiscono un fascio, quello che risulta di tutte le congruenze dirette parallele.

Si può anche asserire che

« Le superficie sviluppabili sono caratterizza-

„te dalla proprietà che le loro geodetiche si possono
„raccogliere in congruenze in modo che tali
„congruenze costituiscono un fascio."

83. Dal paragrafo precedente risulta che, fatta eccezione per le sole superficie sviluppabili e su queste fatta eccezione per un solo fascio, il sistema coordinato covariante φ_r di un fascio qualunque non può essere identicamente nullo. Ridotti a forma canonica, i suoi elementi φ_r assumeranno espressioni della forma

$$\varphi_r = \rho\, \lambda'_r ,$$

ρ essendo un invariante positivo e λ'_r gli elementi del sistema coordinato covariante di una congruenza di linee. Per ogni punto P della superficie φ immaginiamo condotta la tangente alla linea λ'_r nel senso positivo di questa e su questa a partire da P misurata una lunghezza eguale a ρ. Avremo così per ogni punto P della superficie φ un vettore, che chiameremo curvatura del fascio nel punto P.

Indicando con λ_r il sistema coordinato covariante di una congruenza del fascio φ_r richiamiamo le formole

$$\varphi_r = \gamma\, \lambda_r + (\gamma)\, \overline{\lambda}_r$$

Posto

$$\rho \cos\alpha = \gamma , \quad \rho \operatorname{sen} \alpha = (\gamma) \qquad 12)$$

avremo

$$\rho^2 = \gamma^2 + (\gamma)^2 \qquad 13)$$

ed il confronto colle (11) ci darà le

$$\lambda'_r = \cos\alpha\, \lambda_r + \operatorname{sen}\alpha\, \overline{\lambda}_r, \qquad 14)$$

dalle quali risulta che α è l'angolo che le linee λ'_r fanno colla λ_r. Dalle (12) poi risulta che (γ) è la proiezione sulla linea λ_r della curvatura del fascio φ_r.

Abbiamo dunque che

„Data sopra una superficie φ una congruen-„za di linee, la curvatura geodetica di una linea „di questa in un punto qualunque si ottiene „proiettando sulla tangente ad essa la curvatu-„ra geodetica, relativa a quel punto, del fascio, „cui la congruenza appartiene."

È poi facile riconoscere che

„La condizione necessaria e sufficiente per-„chè un fascio φ_r comprenda una congruenza geo-„detica consiste in ciò che la congruenza delle sue „linee di curvatura appartenga al fascio."

Infatti se il fascio φ_r comprende una congruen-za geodetica, potremo far coincidere questa col-la congruenza, il cui sistema coordinato covarian-te appare nelle formole (14). Avremo allora

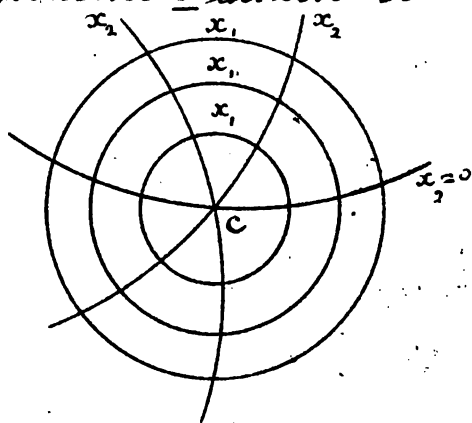
$$\gamma = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \lambda'_r = \overline{\lambda}_r .$$

Reciprocamente se la congruenza λ'_r appartiene al fascio φ_r, assunto $\lambda_r \equiv \lambda'_r$, avremo $\alpha = 0$ e quindi $(\gamma) = 0$, cioè la congruenza $\bar{\lambda}'_r$ sarà geodetica. Vediamo così ancora che

„ Se sopra una superficie un fascio di congruen-
„ ze comprende una congruenza geodetica; que-
„ sta risulta delle traiettorie ortogonali delle li-
„ nee di curvatura del fascio."

84. Preso sulla superficie φ un punto qualunque C si immaginino su di essa condotte tutte le geodetiche, che escono da C e le loro traiettorie ortogonali. Due qualunque di queste intercettano sulle geodetiche archi eguali (§ 72), e in particolare saranno eguali le distanze dei punti di una qualunque di esse da C. Per questa ragione le traiettorie ortogonali alle geodetiche, che escono da un punto C, si dicono circoli geodetici. Il punto C e la distanza misurata lungo la geodetica di ogni punto di un circolo geodetico c da esso si chiamano rispettivamente centro e raggio geodetico di questo.

Assumiamo ora come linee coordinate un sistema di circoli geodetici concen-

trici e quello delle geodetiche, che escono dal loro centro comune; assumendo per parametro dei primi il raggio geodetico, che indicheremo con x_1, e per parametro delle seconde l'angolo x_2, che una qualunque di esse fa con una determinata, per la quale sarà quindi $x_2 = 0$.

Per il quadrato dell'elemento lineare della superficie varrà allora (§ 72) la espressione

$$ds^2 = dx_1^2 + \mathcal{H}^2\, dx_2^2 \qquad A)$$

dalla quale, indicando con ds_1 l'elemento lineare della linea x_1 si trae

$$ds_1 = \mathcal{H}\, dx_2 \qquad 15$$

Se ora si osserva che la linea $x_1 = 0$ si riduce ad un punto e che quindi per $x_1 = 0$ deve essere $ds_1 = 0$, se ne conclude che è

$$(\mathcal{H})_{x_1 = 0} = 0$$

Siccome di più, i punti vicinissimi al punto P possono riguardarsi situati con questo sul pian tangente alla superficie φ, e per x_1 piccolissimo il circolo geodetico x_1 può quindi confondersi con un circolo piano di raggio x_1, così si avrà in questo caso

$$ds_1 = x_1\, dx_2 \;.$$

Dal confronto di questa colla (15) risulta poi che, ammettendo, come ammetteremo, che $\mathcal{H}$ conti-

derata come funzione di x_1 sia sviluppabile in serie di . . . . . . intorno al punto $\mathcal{P}$, avremo

$$\mathcal{H} = x_1 + A_2 x_1^2 + A_3 x_1^3 + \qquad 16)$$

e quindi

$$\left(\frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\right)_{x_1=0} = 1 \qquad 17)$$

Ricordando ancora la (10) e supponendo che la φ non sia sviluppabile, cioè che sia $G \lessgtr 0$, ne trarremo

$$\left(\frac{d^2\mathcal{H}}{dx_1^2}\right)_{x_1=0} = 2A_2 = 0 .$$

e, indicando con G_0 il valore di G nel centro $\underline{C}$ dei circoli geodetici

$$6 A_3 = -G_0$$

Dalla (16) ricaviamo così

$$\mathcal{H} = x_1 - \frac{G_0}{6} x_1^3 + -$$

e dalla (15)

$$ds_1 = \left(x_1 - \frac{G_0}{6} x_1^3 + -\right) dx_2 \quad ,$$

i termini trascurati essendo di ordine superiore al terzo rispetto ad x_1. Limitandoci quindi a considerare i termini fino a questo ordine troviamo per la circonferenza $\underline{c}$ di un circolo geodetico di raggio x_1 la espressione

$$C = 2\pi x_1 - \frac{\pi}{3} G_0 x_1^3 ,$$

essendo G_0 il valore della curvatura totale della superficie nel centro del circolo geodetico.

85. Riferiamoci ancora alle coordinate del pa

ragrafo precedente e consideriamo il triangolo curvilineo $\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}$ formato da due geodetiche del sistema $\underline{x_2}$ corrispondenti ai valori $\underline{0}$ ed x_2 di questo parametro e da una terza geodetica $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$, che incontri le altre due nei punti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Si consideri l'integrale

$$\mathcal{C} = \iint \mathcal{G}\, d\sigma ,$$

esteso all'area di un tale triangolo, il quale, i suoi lati essendo tutti formati da linee geodetiche, si chiama triangolo geodetico. L'integrale $\mathcal{C}$ si dice curvatura totale del triangolo stesso.

Dalla ($\mathcal{A}$) ricaviamo (§ 64)

$$d\sigma = \mathcal{H}\, dx_1 \; dx_2$$

e da questa e dalla (10), ponendo i limiti convenienti all'integrale $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = -\int_0^{x_2} dx_2 \int_0^{x_1} \frac{d^2\mathcal{H}}{dx_1^2}\, dx_1 \quad ,$$

con x_1 indicando la distanza geodetica di un punto qualunque $\mathcal{P}$ della linea $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ dal vertice $\mathcal{C}$. Ricordando la (17) potremo anche scrivere

$$\mathcal{C} = \int_0^{x_2} \left(1 - \frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\right) dx_2 = x_2 - \int_0^{x_2} \frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\, dx_2 \qquad 18)$$

Indicando ora con $\underline{\vartheta}$ l'angolo, che la geodetica $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ fa colla linea x_2, si osservi che la equazione di Gauss

(§ 24) ci dà in questo caso

$$d\vartheta = -\frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\, dx_2 \; .$$

Avremo quindi

$$-\int_0^{x_2} \frac{d\mathcal{H}}{dx_1}\, dx_2 = \vartheta_{\mathcal{B}} - \vartheta_{\mathcal{A}} \; ,$$

indicando con $\vartheta_{\mathcal{A}}$ e $\vartheta_{\mathcal{B}}$ i valori di ϑ nei punti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se poi indichiamo con $\hat{\mathcal{A}}$, $\hat{\mathcal{B}}$ e $\hat{\mathcal{C}}$ gli angoli del triangolo geodetico $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, come risulta dalla figura, abbiamo

$$\vartheta_{\mathcal{A}} = \pi - \mathcal{A}, \quad \vartheta_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}, \quad x_2 = \mathcal{C}$$

e però la (18) assumerà la forma

$$\mathcal{T} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - \pi \; .$$

In questa formola si legge un celebre teorema dovuto a Gauss, teorema, che si enuncia nel modo seguente.

„La curvatura totale di un triangolo geodetico è eguale all'eccesso della somma dei suoi angoli sopra due angoli retti."

Se supponiamo infinitesimi i lati del triangolo $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ ed indichiamo la sua area con σ abbiamo $\mathcal{T} = G.\sigma$ e però la formola precedente ci dà

$$G = \frac{\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - \pi}{\sigma} \; .$$

Abbiamo dunque che

„La curvatura totale di una superficie in un punto qualunque P misura il rapporto tra l'eccesso sopra due retti della somma degli angoli di un

„ triangolo geodetico di lati infinitesimi avente
„ il vertice in P e l'area del triangolo stesso."

Questo teorema ci dà una nuova importante interpretazione geometrica dell'invariante di Gauss. — È poi facile riconoscere che lo stesso teorema vale anche per triangoli finiti se si tratta di superficie a curvatura totale costante.

86. Sopra una superficie φ si assumano due curve C_1, C_2 non geodeticamente parallele, e come coordinate x_1, x_2 le distanze geodetiche di un punto qualunque P di φ dalle due curve C_1 e C_2 che si chiameranno curve basi. Avremo allora (§ 72):

$$\underset{1}{\Delta} x_1 = \underset{1}{\Delta} x_2 = 1 \ ,$$

cioè

$$a_{11} = a_{22} = a \ .$$

Indicando poi con α l'angolo, sotto cui si incontrano le linee coordinate x_1 x_2, per le (12) del Capitolo Secondo avremo

$$a_{12} = a \cos\alpha \ , \ a = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

e quindi

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \ , \ a_{12} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

e l'espressione dell'elemento lineare della superficie φ assumerà la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\left(dx_1^2 + 2\cos\alpha \, dx_1 \, dx_2 + dx_2^2\right) .$$

Sostituiamo ora alle coordinate x_1, x_2 le u_1 ed u_2 legate ad esse dalle relazioni

$$x_1 + x_2 = 2\,u_1\,,\ x_1 - x_2 = 2\,u_2\,,$$

il che equivale ad assumere come linee coordinate u_1 ed u_2 rispettivamente i luoghi dei punti per cui la somma e la differenza delle distanze dalle curve basi sono costanti.

Si trova facilmente la nuova espressione di ds^2 sotto la forma

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\alpha} + \frac{du_2^2}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}\,, \qquad 33)$$

dalla quale si conclude che le linee coordinate u_1 ed u_2 sono ortogonali.

Come caso limite possiamo considerare quello, in cui le curve basi si riducono a due punti P_1 e P_2. Se si suppone di più che la superficie $\underline{f}$ sia piana è evidente che il sistema u_1 coincide con quello delle ellissi ed il sistema u_2 con quello delle iperbole aventi i fuochi nei punti P_1 e P_2. Qualunque siano la superficie f e le curve basi C_1 e C_2 le linee $\underline{u_1}$ ed $\underline{u_2}$ si riguardano come una generalizzazione del caso testè considerato e prendono rispettivamente il nome di ellissi ed iperboli geodetiche.

Sarebbe facile dimostrare reciprocamente che se per un sistema di coordinate u_1, u_2 l'elemento lineare di una qualunque superficie $\underline{f}$ assume una espressione della forma (33), le linee u_1 ed u_2 sono

rispettivamente ellissi ed iperboli geodetiche rispetto a certe curve basi e che α è l'angolo sotto cui le linee parallele alle curve basi si incontrano.

Capitolo Quinto

Fasci e sistemi isotermi. – Rappresentazioni conformi.

Congruenze isoterme e loro parametri isometrici. – Fasci isotermi. Espressione del quadrato dell'elemento lineare quando le linee coordinate costituiscano due congruenze di uno stesso fascio isotermo. – Condizione perchè le linee coordinate di un sistema doppio ortogonale appartengono ad un fascio isotermo e loro parametri isometrici quando tale condizione sia soddisfatta. Esempii. Anisotermia di un fascio. – Problema della rappresentazione conforme di una superficie sopra un'altra o sopra se stessa e sua risoluzione.

---

87. Una congruenza di linee tracciate sopra una superficie, determinata quale velo flessibile ed inestendibile dalla espressione

$$\varphi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

del quadrato del suo elemento lineare, si dice iso-

terma se tra i suoi parametri vi ha una funzione armonica delle variabili indipendenti x_1 ed x_2. — Un tale parametro si dice allora parametro isometrico della congruenza.

Risulta dal Capitolo Quinto §39 della Introduzione che se $\underline{u}$ è un parametro di una congruenza di linee, perchè questa sia isoterma è necessario e basta sia soddisfatta la condizione.

$$\frac{\Delta_2 u}{(\Delta_1 u)^2} = f(u) ,$$

nella quale $\underline{f}$ è il simbolo di una funzione arbitraria; e che, verificata questa condizione, tutti i parametri isometrici ψ della congruenza sono dati dalla formola

$$\psi = c \int e^{-\int f(u)\, du} + C ,$$

$\underline{c}$ e $\underline{C}$ essendo costanti arbitrarie.

Supponiamo ora che una congruenza di linee sia rappresentata analiticamente per mezzo delle tre equazioni differenziali canoniche.

$$\frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}$$

Indicando con ψ un parametro qualunque di queste linee, varranno le formole

$$\psi_r = \rho \overline{\lambda}_r , \qquad 1)$$

essendo

$$\rho = \Delta_1 \psi \qquad 2)$$

un coefficiente indeterminato. Perchè la congruen-

za λ_r sia isoterma sarà quindi necessario e sufficiente che $\underline{\rho}$ possa determinarsi in modo, che risultino insieme soddisfatte le equazioni

$$\left.\begin{aligned}\sum_{1\,rs}^{2} a^{(rs)}\overline{\psi}_{rs} = 0\\ \sum_{1\,rs}^{2} \alpha^{(rs)}\psi_{rs} = 0,\end{aligned}\right\} \quad 3$$

la prima delle quali ci dice (§ 42) che le ψ_r sono le derivate prime di una funzione e la seconda (§ 38 e 39) che questa funzione è armonica. Indicando con φ_s gli elementi del sistema dedotto da quello di elementi λ_r, dalle (1) e dalle equivalenti

$$\overline{\psi}_r = -\rho\lambda_r \quad ,$$

si traggono le

$$\begin{aligned}\overline{\psi}_{rs} &= -\rho_s\lambda_r - \rho\overline{\lambda}_r\varphi_s\\ \psi_{rs} &= \rho_s\overline{\lambda}_r - \rho\lambda_r\varphi_s \quad ;\end{aligned}$$

per le quali posto

$$v = \log\rho \quad , \qquad 4)$$

le (3) assumono la forma

$$\left.\begin{aligned}\sum_{1\,r}^{2} v^{(r)}\lambda_r + \sum_{1\,r}^{2}\varphi^{(r)}\overline{\lambda}_r = 0\\ \sum_{1\,r}^{2} v^{(r)}\overline{\lambda}_r - \sum_{1\,r}^{2}\varphi^{(r)}\lambda_r = 0.\end{aligned}\right\} \quad 3')$$

Queste equivalgono alle

$$\varphi_r = -\overline{v}_r \qquad 5)$$

dalle quali deduciamo che per la esistenza della funzione $\underline{v}$ ovvero dalla $\underline{\rho}$ è necessario e basta che

sia soddisfatta la condizione

$$\sum_{rs}^{2} a^{(rs)} \varphi_{rs} = 0 . \qquad 6)$$

88. La equazione (6) rappresenta, per quanto abbiamo dimostrato, la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza λ_r sia isoterma. Siccome poi essa riguarda non direttamente il sistema coordinato λ_r della congruenza considerata, ma il sistema φ_r da esso dedotto, cioè il sistema coordinato del fascio, cui quella congruenza appartiene, così possiamo concludere che

„ Se una congruenza di linee è isoterma, sono „ pure isoterme tutte quelle, che con essa costituisco„ no uno stesso fascio."

Come è naturale, chiameremo isotermo un fascio se esso risulta di congruenze isoterme. Possiamo dunque asserire

„ L'annullarsi dell'invariante $\sum_{rs}^{2} a^{(rs)} \varphi_{rs}$ rap„ presenta la condizione necessaria e sufficiente per„ chè un fascio φ_r sia isotermo."

Per questa ragione quell'invariante prenderà il nome di anisotermia del fascio φ_r, qualunque esso sia.

Le (5) equivalgono alle

$$v_r = \overline{\varphi}_r , \qquad 5)$$

le quali ci danno le espressioni delle derivate prime di ν e quindi

$$\rho = e^{\nu}, \qquad 6)$$

a meno di un fattore costante arbitrario. Determinato così ρ, la integrazione delle (1) introdurrà una costante additiva, dal che deduciamo, come già dalle considerazioni del paragrafo precedente, che se Ψ è il parametro isometrico di una congruenza isoterma, il parametro isometrico più generale della stessa congruenza è $c\,\psi + \mathfrak{C}$, c e $\mathfrak{C}$ essendo costanti arbitrarie. Possiamo altresì concludere che

„ La determinazione del parametro isometri„co di una congruenza isoterma rappresentata „mediante le tre equazioni differenziali canoni„che richiede soltanto due quadrature ".

89. Come risulta dalle (2) e (6), se ψ è un parametrico isometrico di una congruenza isoterma appartenente ad un fascio λ_r è

$$(\Delta_1 \psi)^2 = e^{2\nu}. \qquad 7)$$

Considerando poi due congruenze isoterme di uno stesso fascio ed indicando con x_1 ed x_2 i loro parametri isometrici, potremo sceglierne questi in modo che il coefficiente arbitrario, che è implicito per le (5) nel secondo membro della (7), risulti lo stes-

so per amendue; talchè si abbia

$$\left(\underset{1}{\Delta} x_1\right)^2 = \left(\underset{1}{\Delta} x_2\right)^2 .$$

Essendo poi

$$\left(\underset{1}{\Delta} x_1\right)^2 = a^{(11)} = \frac{a_{22}}{a}$$

$$\left(\underset{1}{\Delta} x_2\right)^2 = a^{(22)} = \frac{a_{11}}{a}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} ,$$

se con α si indica l'angolo costante, sotto cui si incontrano le linee delle due congruenze x_1 ed x_2, posto

$$a_{11} = \mathcal{H}^2,$$

sarà

$$a_{22} = \mathcal{H}^2, \; a_{12} = \mathcal{H}^2 \cos \alpha$$

e però la forma fondamentale in coordinate x_1 x_2 assumerà la espressione

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 \left(dx_1^2 + 2 \cos \alpha \; dx_1 \, dx_2 + dx_2^2\right) . \quad 8)$$

Si supponga reciprocamente che per un certo sistema di coordinate x_1 x_2 la forma fondamentale assuma una espressione della forma (8), α essendo una costante; dimostreremo che le congruenze x_1, x_2 appartengono ad uno stesso fascio isotermo.

Poichè le linee x_1, x_2 fanno fra di loro l'angolo α è chiaro anzi tutto che le congruenze x_1 x_2 appartengono al medesimo fascio. Per dimostrare che questo è isotermo si osservi anzitutto che con una trasformazione molto semplice si può

dalla (8) fare sparire il $\cos\alpha$. Supposto quindi $\cos\alpha = 0$, dalla (8) risulta la equazione

$$(\Delta_1 x_1)^2 = (\Delta_1 x_2)^2 ,$$

la quale varrà per qualunque sistema di variabili, essendo $\Delta_1 x_1$ e $\Delta_1 x_2$ due invarianti. Riferendoci quindi ad un sistema generale di coordinate ed indicando con λ_r e $\bar{\lambda}_r$ i sistemi coordinati covarianti delle congruenze x_1 ed x_2, con ψ e χ i loro parametri avremo contemporaneamente le formole

$$\psi_r = \rho\,\bar{\lambda}_r , \quad \chi_r = \rho\,\lambda_r \qquad 9)$$

ovvero le equivalenti

$$\bar{\psi}_r = -\rho\,\lambda_r , \; \bar{\chi}_r = \rho\,\bar{\lambda}_r$$

Da queste si traggono le

$$\bar{\psi}_{rs} = -\rho_s\,\lambda_r - \rho\,\bar{\lambda}_r\,\varphi_s$$
$$\bar{\chi}_{rs} = -\rho_s\,\bar{\lambda}_r + \rho\,\lambda_r\,\varphi_s \; ,$$

e da queste dovendo essere

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\,\bar{\psi}_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\,\bar{\chi}_{rs} = 0 ,$$

le (3') e quindi le (5'), le quali ci dicono che il fascio φ_r è isotermo. Dimostrato ciò, si dimostra altresì facilmente, partendo dalle (9), che ψ e χ sono parametri isometrici reciprocamente delle linee λ_r e $\bar{\lambda}_r$. Concludiamo che

„ Se x_1, x_2 sono parametri isometrici di due con-

„ gruenze appartenenti ad uno stesso fascio isoter-
„ mo, tenendo fisso l'uno, si può sempre sostitui-
„ re all'altro un nuovo parametro isometrico per
„ guisa che la espressione del quadrato dell'elemen-
„ to lineare della superficie assuma una espres-
„ sione della forma

„ $$ds^2 = \mathcal{H}^2 (dx_1^2 + 2 \cos \alpha \, dx_1 \, dx_2 + dx_2^2) .$$

„ Se poi il quadrato dell'elemento lineare di una
„ superficie ha una espressione di questa forma,
„ le linee $x_1 x_2$ appartengono ad uno stesso fascio
„ isotermo, ed x_1 x_2 ne sono i parametri isometrici„

Supposto in particolare che le due congruenze siano ortogonali si ha

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 (dx_1^2 + dx_2^2)$$

e quindi

$$ds_1 = \mathcal{H} dx_2 , \; ds_2 = \mathcal{H} dx_1 ,$$

$$ds_1 : ds_2 = dx_2 : dx_1 .$$

Immaginando tracciate sulla superficie le linee x_1 ed x_2 corrispondenti ad aumenti eguali successivi dati ai parametri x_1 ed x_2, vediamo così che la superficie resta divisa in tanti rettangoli simili di lati infinitesimi. È questa la ragione per cui i parametri x_1, x_2 si dicono isometrici. Dalle cose dimostrate risulta altresì che

„ Perchè una funzione $\underline{u}$ di due variabili $x_1 x_2$
„ sia armonica rispetto ad una data forma fonda-

„mentale φ è necessario e basta che si possa deter-
„minare il parametro delle traiettorie ortogonali
„alle linee di parametro u sulla superficie φ in
„modo che la espressione di φ nelle variabili u e
„v assuma la forma

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 (du^2 + dv^2) \,. \text{"}$$

90. Si abbia ora sulla superficie φ un sistema di coordinate ortogonali x_1, x_2 e proponiamoci di riconoscere se il fascio, cui appartengono le linee x_1, x_2 è isotermo e nel caso affermativo di determinarne i parametri isometrici.

Sia:
$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + a_{22}\, dx_2^2$$
la espressione di φ in coordinate $x_1\, x_2$, e si ponga
$$y_1 = u(x_1)\,, \quad y_2 = v(x_2)\,.$$
Indicando con u' e v' le derivate di u e di v, risulterà:

$$dy_1 = u'(x_1)\, dx_1\,, \quad dy_2 = v'(x_2)\, dx_2$$
$$ds^2 = \frac{a_{11}}{u'^2}\, dy_1^2 + \frac{a_{22}}{v'^2}\, dy_2^2\,;$$

e per un teorema dimostrato sopra affinchè il fascio, cui appartengono le linee x_1, x_2 sia isotermo sarà necessario e sufficiente che le funzioni u e v possano scegliersi in modo che risulti

$$\frac{a_{11}}{u'^2} = \frac{a_{22}}{v'^2}\,.$$

Dovrà dunque essere

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,, \qquad 10)$$

μ_1 e μ_2 essendo funzioni rispettivamente di x_1 ed x_2 soltanto. Reciprocamente, verificate queste condizioni e posto

$$y_1 = \int \sqrt{\mu_1}\, dx_1\,,\ y_2 = \int \sqrt{\mu_2}\, dx_2 \qquad 11)$$
$$\frac{a_{11}}{\mu_1} = \frac{a_{22}}{\mu_2} = \mathcal{H}^2\,,$$

risulterà

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 (dy_1^2 + dy_2^2)\,.$$

Vediamo così che la (10) rappresenta la condizione cercata e che, verificata questa, le (11) ci danno i parametri isometrici delle linee x_1 ed x_2.

Richiamando le espressioni del quadrato dell'elemento lineare del piano in coordinate cartesiane, polari ed ellittiche ed applicando il criterio, cui siamo giunti in questo paragrafo, è facile riconoscere che questi sistemi di linee coordinate sono isotermi; e determinarne i parametri isometrici.

Il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione, quando si assumono come linee coordinate i paralleli ed i meridiani e si scelgano opportunamente i loro parametri <u>u</u> e <u>v</u> assume una espressione della forma

$$ds^2 = du^2 + \mathcal{H}^2(u)\, dv^2. \qquad 12)$$

I paralleli ed i meridiani appartengono dunque ad un fascio isotermo. Reciprocamente, assunte

come linee coordinate una congruenza di parallele u ed una congruenza geodetica v e ridotta quindi la espressione del quadrato dell'elemento lineare alla forma (A) del § 72, affinchè le linee u e v appartengono ad un fascio isotermo dal teorema citato risulta che H^2 deve essere il prodotto di una funzione della sola u per una funzione della sola v e può quindi con un cambiamento del parametro v ridursi ad essere funzione soltanto di u. La espressione del ds^2 si può quindi ridurre alla forma (12), e se ne conclude

„ Le sole superficie applicabili sopra superficie di rotazione sono dotate di una congruenza di linee che è insieme geodetica ed isoterma „.

91. Siano φ_r e ψ_r i sistemi coordinati covarianti di due fasci isotermi. Indicando con ϑ l'angolo, che le linee di una congruenza qualunque del fascio ψ_r fanno con quelle di una congruenza qualunque del fascio φ_r, varranno (Capitolo Terzo) le formole

$$\vartheta_r = \psi_r - \varphi_r ,$$

e quindi anche le

$$\vartheta_{rs} = \psi_{rs} - \varphi_{rs}$$

Da queste poi e dall'essere nulle le anisotermie

dei due fasci si trae la quale ci dice che la funzione ϑ è armonica ed è quindi il parametro isometrico di un fascio isotermo. Concludiamo che

„ L'angolo sotto cui si incontrano le linee di „ due congruenze isoterme non appartenenti „ allo stesso fascio è il parametro isometrico di „ un'altra congruenza isoterma."

92. Richiamiamo le formole

$$\varphi_r = \gamma\,\lambda_r + (\gamma)\,\overline{\lambda}_r\ ,$$

in cui φ_r è il sistema coordinato covariante del fascio, cui appartengono le congruenze λ_r e $\overline{\lambda}_r$, mentre γ e (γ) sono le curvature geodetiche delle linee di queste congruenze. Per derivazione covariante secondo φ ne deduciamo le

$$\varphi_{rs} = \gamma_s\,\lambda_r + (\gamma)_s\,\overline{\lambda}_r + \overline{\varphi}_r\,\varphi_s$$

e quindi indicando con ϑ l'anisotermia del fascio φ_r

$$\vartheta = \sum_1^2{}_r\ \gamma^{(r)}\lambda_r + \sum_1^2{}_r\,(\gamma)^{(r)}\overline{\lambda}_r\ , \qquad 12)$$

ovvero, indicando come abbiamo fatto altrove, con $\underline{d}$ e $\underline{\delta}$ le variazioni dipendenti da spostamenti positivi secondo le linee λ_r e $\overline{\lambda}_r$

$$\vartheta = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\delta(\gamma)}{\delta s}\ . \qquad 13)$$

Questa formola ci dà una interpretazione geometrica della anisotermia di un fascio qualun-

gue. E poiché questa dipende, oltre che dalla forma fondamentale, unicamente dal sistema coordinato del fascio, cui essa si riferisce, ne deduciamo che

„ La somma $\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\delta(\gamma)}{\delta s}$ è costante intor-
„ no ad uno stesso punto per tutte le coppie di con-
„ gruenze ortogonali appartenenti ad un me-
„ desimo fascio, ed è eguale all'anisotermia del
„ fascio stesso."

Da questo teorema segue che

„ Se in un fascio isotermo le linee di una con-
„ gruenza sono a curvatura geodetica costan-
„ te, le linee della congruenza ortogonale godono
„ della stessa proprietà."

93. Dimostriamo ora il seguente teorema:

„ Se u e v sono tali parametri isometrici di
„ due congruenze ortogonali ed isoterme di li-
„ nee tracciate sulla superficie φ, che si abbia

$$\varphi = H^2(du^2 + dv^2)$$

„ e si pone

$$z = u \pm i v,$$

„ tutti gli altri sistemi di coordinate pei quali φ
„ assume una espressione della stessa forma si
„ hanno ponendo

$$U + i V = f(z),$$

„ indicando con f una funzione arbitraria, ed

„ assumendo per tali parametri la parte reale
„ $\underline{U}$ ed il coefficiente dell'immaginario $\underline{V}$ di f. „

In fatti, indicando con f' la derivata di f rispetto a z, con f_1 la sua coniugata si avrà

$$d(U+iV) = f'(z)\ (du \pm i\,dv)$$
$$d(U-iV) = f_1(du \mp i\,v)$$

e quindi

$$dU^2 + dV^2 = f' f_1 (du^2 + dv^2)$$
$$\varphi = \frac{K^2}{f' f_1}(dU^2 + dV^2)$$

Reciprocamente sia la espressione di φ nelle variabili U e V della forma

$$\varphi = L^2(dU^2+dV^2).$$

Avremo

$$\nabla(U\,V) = 0$$
$$(\Delta_1 U)^2 = (\Delta_1 V)^2,$$

cioè riferendoci alla espressione di φ supposta nell'enunciato del teorema

$$\frac{dU}{du}\frac{dV}{du} + \frac{dU}{dv}\frac{dV}{dv} = 0$$

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dV}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dv}\right)^2;$$

od anche

$$\frac{dV}{du} = \mp\frac{dU}{dv}, \quad \frac{dV}{dv} = \pm\frac{dU}{du} \qquad 14)$$

Si consideri ora $\underline{U+iV}$ come funzione di $\underline{u}$ e di $\underline{v}$ e la $\underline{v}$ si elimini introducendo in sua vece come variabile indipendente la z. Avremo:

$$U + iV = f(z,u)$$

e quindi

$$\frac{dU}{du} + i\frac{dV}{du} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du}$$

$$\frac{dU}{dv} + i\frac{dV}{dv} = \pm i\frac{df}{dz}.$$

Sommando queste identità dopo aver moltiplicata la seconda per $\pm i$ e tenendo conto della (14) si trova

$$\frac{df}{du} = 0$$

e si conclude quindi che è

$$U + iV = f(z)$$

94. Date due superficie S ed S' considerate come veli flessibili ed inestendibili, e scelti sopra di esse rispettivamente due sistemi di coordinate $(x_1\, x_2)$ $(y_1\, y_2)$, se si pone

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,$$

si stabilisce fra i loro punti una corrispondenza univoca cioè tale che ad ogni punto P dell'una corrisponde un unico e determinato punto P' dell'altra, cioè il punto P', che ha le stesse coordinate del punto P, e reciprocamente. Ad una linea $\underline{l}$ tracciata sulla superficie S corrisponde allora sulla superficie S' la linea $\underline{l}'$ luogo dei punti corrispondenti ai punti di l. – I punti P e le linee $\underline{l}'$ si possono anche riguardare come immagini dei punti $\underline{P}$ e delle linee $\underline{l}$ e la

corrispondenza stabilita tra i punti di S e quelli di S' come una rappresentazione dell'una superficie sull'altra.

Si dice che una rappresentazione di una superficie $\underline{S}$ sopra una superficie S' è conforme, ovvero che essa conserva la similitudine nelle parti infinitesime, se è tale che l'angolo, sotto cui si incontrano due linee qualunque sulla superficie $\underline{S}$ è eguale a quello, sotto cui si incontrano le loro immagini sulla superficie S'. Siano

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \\ ds'^2 &= \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

le espressioni dei quadrati degli elementi lineari delle superficie S ed S', e

$$\frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)} \qquad 16)$$

le equazioni canoniche di una congruenza di linee tracciate sulla superficie S. Sulla superficie S' le immagini delle linee λ_r costituiranno una congruenza, le cui equazioni canoniche, posto

$$\rho = \frac{ds}{ds'}\,,$$

saranno

$$\frac{dx_r}{ds'} = \lambda'^{(r)} = \rho\,\lambda^{(r)} \qquad 17)$$

Si considerino ora sulla superficie S due con-

gruenze λ_r e μ_r, alle quali corrispondano sul-
la superficie S' le congruenze λ'_r e μ'_r. Indicando
con ϑ e ϑ' rispettivamente gli angoli, che le linee
λ_r fanno colle μ_r e le λ'_r colle μ'_r, avremo

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)} \mu^{(s)}$$

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, \lambda'^{(r)} \mu'^{(s)}$$

ovvero per le (16)

$$\cos\vartheta' = \rho^2 \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} .$$

Perchè la rappresentazione, di cui si tratta, sia
conforme dovrà aversi

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta' \qquad 18)$$

cioè

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} \left(a_{rs} - \rho^2 b_{rs}\right) \lambda^{(r)} \mu^{(s)} = 0 \; ,$$

qualunque siano le congruenze λ_r e μ_r. In al-
tri termini dovranno essere soddisfatte le con-
dizioni

$$a_{rs} = \rho^2 b_{rs} \; , \qquad 18)$$

in cui ρ rappresenta una indeterminata

Ne segue che, se è $a_{12} = 0$ ed $a_{11} = a_{22}$, deve pure
essere $b_{12} = 0$ e $b_{11} = b_{22}$; cioè se è

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 \left(dx_1^2 + dx_2^2\right)$$

deve essere pure

$$ds'^2 = \mathcal{L}^2 \left(dx_1^2 + dx_2^2\right) .$$

Reciprocamente, se questa condizione è soddi-

sfatta, le (18_1) e la (18) sono identicamente soddisfatte, e quindi la rappresentazione è conforme.

Possiamo dunque concludere che:

1° " Le rappresentazioni conformi di una " superficie S sopra una superficie S' sono tutte e " soltanto quelle, per le quali a due congruen- " ze ortogonali ed isoterme di una superficie " corrispondono sull'altra due congruenze pure " ortogonali ed isoterme."

2° " Se $x_1\,x_2$; $y_1\,y_2$ sono rispettivamente per " le superficie S ed S' i parametri di due congruen- " ze ortogonali ed isoterme, per i quali i qua- " drati dei loro elementi lineari assumono es- " pressioni della forma

$$ds^2 = \mathcal{H}^2 (dx_1^2 + dx_2^2)$$
$$ds'^2 = \mathcal{L}^2 (dy_1^2 + dy_2^2)\,,$$

" si ha una rappresentazione conforme della su- " perficie S sulla superficie S' ponendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$."

Da ciò e dal teorema del paragrafo precedente segue poi che per ottenere tutte le rappresentazioni conformi di una superficie S sopra un'altra superficie S' basta conoscere su ciascuna superficie una congruenza isoterma definita mediante le sue equazioni differenziali ca-

noniche. In fatti noto il sistema coordinato di una congruenza isoterma sulla superficie S, conosceremo altresì quello della sua congruenza ortogonale e con semplici quadrature troveremo i loro parametri x_1, x_2, pei quali ds^2 assume una espressione della forma indicata nel teorema 2°; e pel teorema del paragrafo precedente conosceremo anche tutte le coordinate x_1 ed x_2 capaci di dare al quadrato dell'elemento lineare di S una espressione della stessa forma. — In egual modo con semplici quadrature determineremo due coordinate y_1 ed y_2, per le quali assume questa stessa forma la espressione del quadrato dell'elemento lineare di S'. Per avere poi tutte le rappresentazioni cercate basterà eguagliare y_1 ed y_2 successivamente a tutti i valori, che possono assumere x_1 ed x_2.

Se le espressioni di ds^2 e ds'^2 sono equivalenti le superficie S ed S' sono applicabili fra di loro, cioè due forme di uno stesso velo flessibile ed inestendibile. La teoria svolta sopra ci insegna quindi a stabilire tutte le rappresentazioni conformi di una superficie sopra sè stessa, qualora su questa conosciamo una congruenza isoterme. Risulta infatti da quanto abbiamo dimostra-

:to che assunte come linee coordinate quelle della congruenza data e le loro traiettorie ortogonali e scelti i loro parametri u e v per modo che pel quadrato dell'elemento lineare della superficie si abbia una espressione della forma

$$ds^2 = H^2 (du^2 + dv^2) ,$$

indicando con f una funzione arbitraria e posto:

$$z = u \pm i v \qquad 19)$$
$$U + i V = f(z) , \qquad 20)$$

tutte le rappresentazioni conformi della superficie sopra sè stessa si avranno facendo corrispondere ad ogni punto di coordinate (u, v) quello di coordinate $(U V)$.

95. Tutta la teoria della rappresentazione conforme è stata da noi stabilita assumendo come equazione del problema la (18), che è soddisfatta non soltanto per $\vartheta' = \vartheta$, ma anche per $\vartheta' = -\vartheta$. Abbiamo dunque considerati due casi di rappresentazione conforme; e cioè quello, in cui ad angoli dati sulla superficie S corrispondono angoli eguali e dello stesso segno sulla superficie S'; e quello, in cui ad angoli dati sulla superficie S corrispondono angoli eguali ma di

segni opposti sulla superficie S'. Supponendo S' identica ad S dimostreremo ora che gli angoli corrispondenti hanno segni o sensi uguali od opposti, secondo che nelle (19) si sceglie il segno + od il segno — .

Per dimostrare ciò osserviamo prima di tutto come dalle (14) si tragga la formola

$$\frac{d(\mathcal{U}\mathcal{V})}{d(uv)} = \pm \left\{ \left(\frac{d\mathcal{V}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{V}}{dv}\right)^2 \right\} .$$

Indicando rispettivamente con $\underline{a}$ ed $\underline{\mathcal{A}}$ il discriminante della forma fondamentale, secondo che questa è espressa in coordinate u, v, ovvero in coordinate $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ si avrà quindi (§ 13)

$$a = \mathcal{A} \left\{ \left(\frac{d\mathcal{V}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{V}}{dv}\right)^2 \right\}^2 \qquad 21)$$

Per valerci delle nostre notazioni generali poniamo ora

$$u = x_1 \quad v = x_2 \; ; \; \mathcal{U} = X_1 , \mathcal{V} = X_2 ,$$

e siano $\quad \lambda^{(r)}$ e $\mu^{(r)}$; $\lambda'^{(r)}$ e $\mu'^{(r)}$

i sistemi coordinati controvarianti di due congruenze di linee tracciate sulla superficie considerata e delle congruenze, che ad esse corrispondono nella rappresentazione definita dalle formole (19) e (20). Indicando ancora con ϑ l'angolo delle linee μ_r colle λ_r, con ϑ' quello delle

λ'_r colle μ'_r avremo

$$\operatorname{sen}\vartheta = \sum_1^2{}_r \mu^{(r)}\overline{\lambda}_r, \quad \operatorname{sen}\vartheta' = \sum_1^2{}_r \mu'^{(r)}\overline{\lambda}'_r. \qquad 22)$$

Avendosi poi

$$\mu'^{(r)} = \frac{dX_r}{ds} = \frac{dX_r}{dx_1}\mu^{(1)} + \frac{dX_r}{dx_2}\mu^{(2)},$$

per le (14) potremo scrivere

$$\mu'^{(1)} = \pm\left(\frac{dX_2}{dx_2}\mu^{(1)} - \frac{dX_2}{dx_1}\mu^{(2)}\right)$$

$$\mu'^{(2)} = \frac{dX_2}{dx_1}\mu^{(1)} + \frac{dX_2}{dx_2}\mu^{(2)},$$

ed analogamente

$$\overline{\lambda}'_1 = \sqrt{A}\,\lambda'^{(2)} = \sqrt{a}\left(\frac{dX_2}{dx_1}\lambda^{(1)} + \frac{dX_2}{dx_2}\lambda^{(2)}\right)$$

$$\overline{\lambda}'_2 = \mp\sqrt{a}\left(\frac{dX_2}{dx_2}\lambda^{(1)} - \frac{dX_2}{dx_1}\lambda^{(2)}\right).$$

Da questa e dalle (22) risulta la

$$\operatorname{sen}\vartheta' = \pm\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{a}}\left\{\left(\frac{dX_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dX_2}{dx_2}\right)^2\right\}\operatorname{sen}\vartheta,$$

e per la (21), ricordando che $\sqrt{A}$ e $\sqrt{a}$ sono da assumere amendue positive,

$$\operatorname{sen}\vartheta' = \pm\operatorname{sen}\vartheta.$$

Questa poi insieme alla (18) ci dà la

$$\vartheta' = \pm\vartheta,$$

nella quale dovrà assumersi lo stesso segno che nella (19); e così risulta dimostrato quanto ci eravamo proposti.

Capitolo Sesto

Sulla integrazione della equazione delle

congruenze geodetiche.

Integrali primi della equazione delle geodetiche. — Metodo per ottenere in termini finiti la equazione delle geodetiche, quando sia dato per mezzo delle sue equazioni canoniche il sistema semplicemente infinito di congruenze geodetiche. — Applicazione alla integrazione per quadrature della equazione delle geodetiche per le superficie sviluppabili. — Integrali primi omogenei per la equazione delle geodetiche in generale. Integrali lineari. — Integrali quadratici — Teorema di Beltrami.

---

96. Dobbiamo ora ritornare alla teoria delle congruenze geodetiche per occuparci della integrazione della loro equazione. Come sappiamo, questa è una equazione differenziale ordinaria di 2° ordine, il cui integrale generale contiene quindi due costanti arbitrarie.

Su questo argomento osserviamo prima di ogni altra cosa che, se λ_r è il sistema coordinato covariante di una congruenza geodetica, le coordinate dei punti delle geodetiche, che a questo appartengono, devono soddisfare alla equazione differenziale di 1° ordine

$$\sum_{1}^{2}{}_r \overline{\lambda}_r \, dx_r = 0 \; ;$$

che può riguardarsi come un integrale 1° per

la equazione delle geodetiche. Si può dunque dire che il conoscere una congruenza geodetica per mezzo del suo sistema coordinato, covariante o controvariante, equivale a conoscere un integrale primo per la equazione delle geodetiche.

Ricordando poi (§72) che il sistema coordinato covariante di una congruenza geodetica risulta delle derivate di una funzione e che questa è un parametro per la congruenza ortogonale, si vede che, nota una congruenza geodetica, la equazione in termini finiti della congruenza ad essa ortogonale si ottiene con semplici quadrature.

97. Dalle considerazioni svolte nel Capitolo Quarto risulta che sopra ogni superficie le congruenze geodetiche costituiscono una semplice infinità. In altri termini, riguardando le congruenze come rappresentate dalle loro equazioni differenziali canoniche, l'insieme di tutte le geodetiche di una superficie potrà considerarsi come noto, quando si conosca un sistema semplice λ_r di invariante algebrico eguale all'unità, il quale soddisfi alla equazione delle congruenze geodetiche (§72)

$$\sum_{1}^{2}{}_{s}\, \lambda^{(s)} \lambda_{rs} = 0, \qquad g)$$

ed i cui elementi contengono una costante arbitraria. Dimostreremo ora che

„ Se per una superficie data si conosce una semplice infinità di congruenze geodetiche, la integrazione della equazione delle geodetiche, cioè la determinazione della equazione in termini finiti di queste, richiede soltanto quadrature."

Siano λ_r gli elementi del sistema coordinato covariante di una semplice infinità di congruenze geodetiche della superficie, che si considera, e quindi gli elementi stessi dipendono da una costante arbitraria $\underline{c}$. Come abbiamo osservato le λ_r saranno le derivate di una funzione λ, la quale potrà determinarsi con semplici quadrature. Se poi si deriva rispetto a $\underline{c}$ la equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)} \lambda_r \lambda_s = 1, \qquad 1)$$

si ottiene la

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)} \frac{d\lambda_r}{dc} = 0,$$

che si può scrivere anche sotto la forma seguente

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, \lambda^{(r)} \frac{d}{dx_r} \frac{d\lambda}{dc} = 0;$$

e ci dice (§ 61) che $\frac{d\lambda}{dc}$ è un parametro per la con-

gruenza geodetica λ_r. Indicando con $\mathfrak{C}$ una nuova costante arbitraria possiamo quindi ottenere la equazione delle geodetiche in termini finiti e con due costanti arbitrarie sotto la forma

$$\frac{d\lambda}{dc} = \mathfrak{C},$$

In altri termini questa equazione sarà l'integrale generale della equazione (g).

Il teorema ora dimostrato si suole enunciare anche nel modo seguente, che risulta giustificato dalle considerazioni svolte nel § 96.

„ Se della equazione delle geodetiche sopra u-
„ na superficie si conosce un integrale primo
„ con una costante arbitraria non additiva, la
„ integrazione della equazione stessa esige sol-
„ tanto quadrature."

98. Applicando il teorema generale del paragrafo precedente è facile dimostrare che

„ La integrazione della equazione delle geo-
„ detiche per le superficie sviluppabili esige sol-
„ tanto quadrature."

Se ci riferiamo ad una congruenza qualunque μ_r ed indichiamo con ϑ l'angolo, che le sue linee fanno con quelle di una congruenza geodetica pure qualunque, la equazione delle geo-

detiche può mettersi (§ 74) sotto la forma

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \sum_{1}^{2} {}_r \mu^{(r)} \psi_r , \qquad g_3)$$

indicando con $\underline{ds}$ l'elemento lineare delle linee μ_r, con ψ_r gli elementi del sistema dedotto dal sistema μ_r. Se si osserva ora (§ 67 e 42) che per le superficie sviluppabili essendo $G = 0$ la condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema semplice covariante possa riguardarsi come dedotto da un sistema semplice ed invariante algebrico eguale all'unità coincide con quella necessaria e sufficiente perchè esso risulti delle derivate prime di una funzione; e che quindi le ψ_r sono le derivate di una funzione ψ, che si determinerà con semplici quadrature, e la (1) assume la forma

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\psi}{ds} .$$

Questo dovendo valere, qualunque sia la congruenza μ_r integrata ci dà

$$\vartheta = \psi + c ,$$

con $\underline{c}$ indicando una costante arbitraria. Posto dunque (§. 70)

$$\lambda_r = \cos(\psi + c)\,\mu_r - \operatorname{sen}(\psi + c)\,\overline{\mu}_r ,$$

il sistema λ_r rappresenterà una semplice infinità di congruenze geodetiche e pel teorema del para-

grafo precedente la integrazione della equazione delle geodetiche dipenderà ancora soltanto da quadrature.

99. Per il teorema del § 97 la integrazione della equazione delle geodetiche sopra una superficie qualunque potrà considerarsi come raggiunta, quando siasi determinato un sistema semplice λ_r ad invariante algebrico eguale all'unità, i cui elementi dipendano da una costante arbitraria e soddisfacciano alla equazione (g). Indicando con $\underline{c}$ una costante arbitraria supponiamo gli elementi λ_r determinati, oltre che dalle condizioni poste, da una equazione della forma

$$f(x_1\, x_2\, \lambda_1\, \lambda_2) = c\,, \qquad 2)$$

e vediamo a quali equazioni debba soddisfare la $\underline{f}$. Se si indica con f_s la derivata di $\underline{f}$ rispetto ad x_s, presa considerando le λ_r come costanti, dalle (2) per derivazione si traggono le

$$f_s + \sum_1^2{}_r \frac{df}{d\lambda_r}\frac{d\lambda_r}{dx_s} = 0\,,$$

le quali per le (α^3) del § 23 possono essere sostituite dalle

$$f_s + \sum_1^2{}_r \frac{df}{d\lambda_r}\left(\lambda_{rs} + \sum_1^2{}_q a_{rs,\,q}\,\lambda^{(q)}\right) = 0\,.$$

Perchè le λ_r determinate dalla (2) soddisfacciano,

qualunque sia c, alla equazione (g), la equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{s} \lambda^{(s)} \left(f_s + \sum_{qr} a_{rs,q} \lambda^{(q)} \frac{df}{d\lambda_r} \right) = 0 \; ; \qquad 3)$$

dovrà essere identicamente soddisfatta da tutte le λ_r, che soddisfanno alla equazione (1). Si osservi ora che questa equazione permette di moltiplicare ogni termine della f per una potenza qualunque del suo primo membro e quindi, se la f è intiera e di grado m nelle λ_r, permette di porre

$$f = \psi + \chi , \qquad h)$$

ψ e χ essendo funzioni omogenee e rispettivamente dei gradi m ed $m-1$ nelle λ_r stesse. Se si osserva ancora che, se per f si pone nel primo membro della (3) una funzione omogenea e di grado m nella λ_r, esso risulta omogeneo e di grado $m+1$, si riconosce facilmente che la (3) non può essere soddisfatta identicamente nel senso detto sopra dalla espressione data per f dalla (4) se non lo è separatamente da ψ e da χ.

Da tutte queste considerazioni concludiamo che „La ricerca degli integrali primi intieri per „la equazione delle geodetiche si può ricondurre „a quella degli integrali primi intieri ed omogenei."

Di questa ricerca, ci occuperemo appunto nel seguito di questo capitolo.

100. Perchè la (2) ci dia un integrale primo omogeneo di grado $\underline{m}$ per la equazione delle geodetiche dovremo porre

$$f=\sum_{1\ r_1 r_2\cdots r_m}^{2} c^{(r_1 r_2\cdots r_m)}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_m}. \qquad 5)$$

Il primo membro della (3) risulterà allora omogeneo e di grado $m+1$ ed i coefficienti $c^{(r_1 r_2\cdots r_m)}$ dovranno essere determinati in modo che esso si annulli identicamente. Ora dalla (5) abbiamo le

$$f_s=\sum_{1\ r_1 r_2\cdots r_m}^{m}\frac{d\,c^{(r_1 r_2\cdots r_m)}}{dx_s}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_m},$$

e da queste, ricordando anche le formole (B) del § 22, le

$$\sum_{1\ s}^{2}\lambda^{(s)}f_s=\sum_{1\ r_1 r_2\cdots r_m r_{m+1}}^{2} c^{(r_1 r_2\cdots r_m r_{m+1})}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_{m+1}}$$
$$-\,m\sum_{1\ r r_1 r_2\cdots r_{m-1}}^{2} c^{(r r_1 r_2\cdots r_{m-1})}\sum_{1\ ip}^{2}\lambda^{(i)}\lambda^{(p)}a_{ir,p}$$

Dalla (5) ricaviamo pure le

$$\frac{df}{d\lambda_r}=m\sum_{r_1 r_2\cdots r_{m-1}} c^{(r r_1 r_2\cdots r_{m-1})}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_{m-1}}.$$

e la (3) assume quindi la forma

$$\sum_{1\ r_1 r_2\cdots r_m r_{m+1}}^{2} c^{(r_1 r_2\cdots r_m r_{m+1})}\lambda_{r_1}\lambda_{r_2}\cdots\lambda_{r_{m+1}}=0. \qquad 3')$$

Da un sistema qualunque di ordine $\underline{p}$ si ottiene un sistema simmetrico dello stesso ordine se si for-

mano tutti gli elementi, che corrispondono a di-verse permutazioni degli stessi indici. Se il si-stema così ottenuto da un sistema proposto è i-denticamente nullo, questo si dirà emisimmetrico. Così il risultato contenuto nella equazione (3') può enunciarsi come segue

„ Perchè, c essendo una costante arbitraria,
„ una equazione della forma

$$„ \quad \sum_{1\, r_1 r_2 \cdots r_m}^{n} c^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} \cdots \lambda_{r_m} = c$$

„ definisca una infinità semplice di congruenze
„ geodetiche per le superficie di elemento lineare
„ $\sqrt{\varphi}$, è necessario e basta che il primo sistema de-
„ rivato secondo φ dal sistema controvariante
„ di elementi $c^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$, o dal suo reciproco, sia emi-
„ simmetrico."

Se il sistema di elementi $c_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ gode della proprietà ora indicata diremo che l'integrale per la equazione delle geodetiche

$$\sum_{1\, r_1 r_2 \cdots r_m}^{2} c^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} \lambda_{r_1} \lambda_{r_2} \cdots \lambda_{r_m} = c\,,$$

proviene da esso. Diremo ancora che p sistemi covarianti o controvarianti dello stesso ordine m sono tra loro indipendenti, se non è possibile deter-minare p costanti $c_1, c_2, \dots c_p$ non tutte nulle e tali

che il sistema, che si ottiene sommando i sistemi proposti dopo averli moltiplicati per $c_1, c_2, \ldots c_p$ risulti identicamente nullo.

Si osservi ora che, se più sistemi simmetrici covarianti dello stesso ordine godono della proprietà supposta nel precedente teorema, della stessa proprietà gode ancora ogni sistema ottenuto da essi sommandoli dopo avere moltiplicato ciascuno per una costante qualunque; mentre l'integrale proveniente da un tale sistema è una conseguenza necessaria di quelli, che provengono dai singoli sistemi prima considerati e potremo ancora conchiudere che

„ Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione delle geodetiche per le superficie „ di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ ammetta un integrale primo intiero omogeneo di grado <u>m</u> coincidono con „ quelle necessarie e sufficienti perchè esista un sistema simmetrico di ordine m tale che il primo „ sistema derivato da esso covariantemente secondo „ φ sia emisimmetrico. Da ogni sistema dotato „ di tale proprietà proviene uno ed un solo integrale indipendente e però il numero dei sistemi indipendenti di ordine <u>m</u> dotati della proprietà stessa coincide col numero degli integra-

„si per la equazione delle geodetiche indipendenti
„ e della natura indicata."

101. Secondo il teorema generale del paragrafo precedente per trovare, se esistono, gli integrali primi interi lineari ed omogenei per la equazione delle geodetiche per le superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$, dobbiamo ricercare i sistemi semplici tali, che i sistemi derivati da essi covariantemente secondo φ risultino emisimmetrici. Se c_1, c_2 sono gli elementi di un tale sistema, l'integrale, che da esso proviene è dato dalla equazione

$$\sum_1^2{}_r\, c^{(r)} \lambda_r = c\,, \qquad 6)$$

nella quale c rappresenta una costante arbitraria. Se poi le espressioni delle c_r si assumono sotto la forma canonica (§. 42)

$$c_r = \rho\, \mu_r\,, \qquad 7)$$

e con ϑ si indica l'angolo, che le linee μ_r fanno colle λ_r, l'integrale stesso assume la forma

$$\rho \cos \vartheta = c\,.$$

Dalle (7) ricaviamo successivamente le

$$\left.\begin{aligned} c_{rs} &= \rho_s\, \mu_r + \rho\, \bar{\mu}_r\, \psi_s, \\ \rho_s &= \sum_1^2{}_r\, \mu^{(r)} c_{rs}\ ;\ \rho\, \psi_s = \sum_1^2{}_r\, \bar{\mu}^{(r)} c_{rs}, \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

nelle quali coi simboli ψ_s si sono indicati gli

elementi del sistema dedotto da quello di elementi μ_r. Se si concepiscono gli elementi $c_{rs}+c_{sr}$ espressi per gli elementi μ_r e $\bar{\mu}_s$ nel modo indicato nel § 44 si riconosce facilmente che le condizioni di emisimmetria pel sistema di elementi c_{rs} sono rappresentate dalle equazioni

$$\sum_1^2{}_{rs}\, \mu^{(r)}\mu^{(s)}c_{rs}=0, \sum_1^2{}_{rs}\, \bar{\mu}^{(r)}\bar{\mu}^{(s)}c_{rs}=0$$

$$\sum_1^2{}_{rs}\left(\mu^{(r)}\bar{\mu}^{(s)}+\bar{\mu}^{(r)}\mu^{(s)}\right)c_{rs}=0,$$

le quali per le (8) assumono la forma

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^2{}_r\, \rho^{(r)}\mu_r=0\,, \quad \sum_1^2{}_r\, \psi^{(r)}\bar{\mu}_r=0 \\ \sum_1^2{}_r\, \rho^{(r)}\bar{\mu}_r+\rho\sum_1^2{}_r\, \psi^{(r)}\mu_r=0 \end{array}\right\} \quad 9)$$

la seconda di queste ci dice (§ 72) che la congruenza μ_r deve risultare di linee parallele. — La prima derivata e combinata colle (9) dà le

$$\sum_1^2{}_r\, \mu^{(r)}\rho_{rs}-\psi_s\sum_r \rho^{(r)}\bar{\mu}_r=0,$$

dalle quali e dalla seconda delle (9) si trae la

$$\sum_1^2{}_{rs}\, \mu^{(r)}\bar{\mu}^{(s)}\rho_{rs}=0. \qquad 10)$$

Derivando ancora la seconda e la terza delle (9) e tenendo conto di queste ritroviamo le

$$\sum_1^2{}_r\, \bar{\mu}^{(r)}\psi_{rs}-\psi_s\sum_1^2{}_r\, \psi^{(r)}\mu_r=0$$

$$\sum_1^2{}_r \bar{\mu}^{(r)}\rho_{rs} + \rho_s \sum_1^2{}_r \psi^{(r)}\mu_r + \rho \sum_1^2{}_r \mu^{(r)}\psi_{rs} = 0 ,$$

e quindi avendo presente ancora la (10), le

$$\sum_1^2{}_{rs} \bar{\mu}^{(r)}\bar{\mu}^{(s)}\psi_{rs} = 0$$

$$\sum_1^2{}_{rs} \mu^{(r)}\mu^{(s)}\psi_{rs} = 0 .$$

Sommando queste ultime e ricordando le (5) del § 41 perveniamo alla

$$\sum_1^2{}_{rs} a^{(rs)}\psi_{rs} = 0 ,$$

la quale ci dice che il fascio ψ_r, cui appartiene la congruenza μ_r di linee parallele, è isotermo.

Si supponga reciprocamente che sulla superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ esista un fascio isotermo ψ_r, il quale comprenda una congruenza di linee parallele μ_r e quindi una congruenza geodetica $\bar{\mu}_r$. La seconda delle (9) sarà allora soddisfatta, mentre, posto $\nu = \log \rho$, e designando con γ la curvatura geodetica delle linee μ_r, le altre due assumono la forma

$$\nu_r = -\gamma \bar{\mu}_r \qquad 11)$$

A queste equivalgono le

$$\bar{\nu}_r = \gamma \mu_r ,$$

dalle quali si traggono le

$$\bar{\nu}_{rs} = \gamma_s \mu_r + \gamma \bar{\mu}_r \psi_s ;$$

e quindi la

$$\sum_{1\,rs}^{2} a^{(rs)}\,\overline{V}_{rs} = 0\,, \qquad 12)$$

essendo (§ 72)

$$\sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)}\gamma_r = 0\,, \sum_{1\,r}^{2} \overline{\mu}^{(r)}\psi_r = 0\,,$$

per essere il fascio ψ_r isotermo e la congruenza $\overline{\mu}_r$ geodetica.

Se consideriamo la funzione V come incognita, la (12) ci dice che il sistema delle (11) è completo. Possiamo quindi concludere che nella ipotesi ammessa esiste un sistema di elementi μ_r e d'invariante algebrico eguale all'unità ed una funzione ξ determinata a meno di un fattore costante (che senza torre nulla alla generalità del risultato può nel nostro caso assumersi eguale ad 1) tali che il sistema derivato da quello, i cui elementi c_r sono definiti dalle (7), risulta emisimmetrico. Possiamo quindi avendo presente anche la (6), concludere che

„ Perchè la equazione delle geodetiche per le „ superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ ammetta un „ integrale primo intiero omogeneo di 1° grado „ è necessario e basta che sopra di esse esista un „ fascio isotermo, il quale comprenda una con„gruenza geodetica e quindi una congruenza di „ linee parallele μ_r. Verificata questa condizione,

„ e indicando con ϑ l'angolo, che le linee μ_r fanno
„ con quelle di una congruenza geodetica qua-
„ lunque, con γ la loro curvatura geodetica, con ν
„ un integrale qualunque del sistema completo

$$\nu_r = -\gamma\,\bar{\mu}_r\,,$$

„ con c una costante arbitraria si ha un integra-
„ le primo della equazione delle geodetiche ponendo

$$e^{\nu}\cos\vartheta = c\,.\text{"}$$

Come si riconosce applicando un noto teorema del § 42 ed avendo presenti le (11) esiste una funzio-ne χ, le cui derivate prime sono date dalle for-mole

$$\chi_r = e^{-\nu}\mu_r\,,$$

per la quale si ha quindi

$$\Delta_1\chi = \pm\, e^{-\nu}.$$

La funzione χ è un parametro delle linee $\bar{\mu}_r$ e pe-rò indicando con ds l'elemento lineare delle μ_r abbiamo (§ 66).

$$\Delta_1\chi = \frac{d\chi}{ds}$$

E' dunque

$$e^{\nu} = \pm\,\frac{ds}{d\chi}$$

e l'integrale lineare per la equazione delle geode-tiche determinato sopra può anche mettersi sotto la forma

$$\frac{ds}{d\chi}\cos\vartheta = c \qquad 13)$$

102. Se una superficie è dotata di un fascio isotermo, il quale comprenda una congruenza di linee parallele μ_r e quindi una congruenza geodetica $\bar{\mu}_r$, assunte come coordinate le linee μ_r e $\bar{\mu}_r$ e scelti opportunamente i loro parametri x_1 ed x_2, il suo elemento lineare assume, come risulta dai Capitolo Quarto e Quinto, una espressione della forma

$$ds^2 = dx_1^2 + \mathcal{H}^2 dx_2^2 ,$$

$\mathcal{H}$ essendo funzione della sola x_1. Questa espressione pel quadrato dell'elemento lineare è caratteristica (§ 57) per le superficie di rotazione quando le linee x_1 ed x_2 siano rispettivamente i paralleli ed i meridiani. Possiamo quindi concludere che

„ La equazione delle geodetiche ammette u-
„no ed uno solo integrale primo intiero lineare
„ed omogeneo per le superficie applicabili sopra
„superficie di rotazione e per queste superficie sol-
„tanto."

E poichè, per quanto abbiamo detto per le superficie di rotazione le linee μ_r sono i paralleli e χ è una funzione della sola longitudine φ, si avrà $d\chi = \frac{d\chi}{d\varphi} d\varphi$, ed indicando con r il raggio di un parallelo qualunque $ds = r\,d\varphi$. La (13) ci da dunque

$$r \cos \vartheta = c \frac{d\chi}{d\varphi} ,$$

nella quale si legge un teorema dovuto a Clairaut e che suole enunciarsi nel modo seguente.

„ In ogni punto di una geodetica tracciata „ sopra una superficie di rotazione il prodotto del „ raggio del parallelo pel seno dell'angolo di inclinazione sul meridiano è costante."

103. Per la esistenza di un integrale primo quadratico per la equazione delle geodetiche sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ è necessario e basta che esista un sistema doppio simmetrico, tale che il primo sistema derivato da esso secondo φ sia emisimmetrico. Per ogni sistema di elementi c_{rs} dotato di tale proprietà si ha poi un solo integrale quadratico, che si ottiene ponendo

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} c^{(rs)} \lambda_r \lambda_s = c . \qquad 14)$$

Osserviamo però che il primo sistema derivato secondo φ dal sistema dei suoi coefficienti a_{rs} è emisimmetrico, perchè identicamente nullo (§ 23).

Per questa ragione può dirsi che la equazione (1) ci dà un integrale primo quadratico per la equazione delle geodetiche sulle superficie considerate; ma noi parlando di integrali di questa natura faremo sempre astrazione da esso.

Per la stessa ragione più integrali quadratici

per la equazione delle geodetiche saranno da considerare come indipendenti, quando i sistemi doppi di elementi c_{rs}, dai quali provengono, siano indipendenti fra di loro e da quello dei coefficienti della forma fondamentale.

Premesso ciò e dovendo ricercare i sistemi doppi, i cui sistemi derivati secondo φ sono emisimmetrici, anche in questo caso assumiamo i loro elementi c_{rs} sotto la forma canonica (§ 44)

$$c_{rs} = \alpha\,\mu_r\,\mu_s + \beta\,\bar{\mu}_r\,\bar{\mu}_s\,, \qquad 15)$$

per la quale indicando ancora con ϑ l'angolo delle linee μ_r colle λ_r, l'integrale (14) assumerà la forma

$$\alpha\cos^2\vartheta + \beta\,\text{sen}^2\vartheta = c\,. \qquad 14)$$

Ponendo

$$\delta = \alpha - \beta \qquad 16)$$

ed indicando, come prima, con ψ_r gli elementi del sistema dedotto da quello di elementi μ_r, le (15) derivate covariantemente secondo φ ci danno le

$$c_{rst} = \alpha_t\,\mu_r\,\mu_s + \beta_t\,\bar{\mu}_r\,\bar{\mu}_s + \delta\,(\mu_r\,\bar{\mu}_s + \bar{\mu}_r\,\mu_s)\,\psi_t \qquad 17)$$

È poi facile riconoscere che le condizioni di emisimmetria del sistema di elementi c_{rst} sono rappresentate dalle equazioni

$$\sum_{rst}^{2}{}_{1}\, c^{(rst)}\,\mu_r\,\mu_s\,\mu_t = 0\,, \quad \sum_{rst}^{2}{}_{1}\, c^{(rst)}\,(\bar{\mu}_r\,\mu_s\,\mu_t + \mu_r\,\bar{\mu}_s\,\mu_t + \mu_r\,\mu_s\,\bar{\mu}_t) = 0$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{rst}\, c^{(rst)}(\mu_r \bar{\mu}_s \bar{\mu}_t + \bar{\mu}_r \mu_s \bar{\mu}_t + \bar{\mu}_r \bar{\mu}_s \mu_t) = 0, \quad \sum_{1}^{2}{}_{rst}\, c^{(rst)} \bar{\mu}_r \bar{\mu}_s \bar{\mu}_t = 0;$$

le quali per le (17) assumono la forma

$$\sum_{1}^{2}{}_r\, \alpha^{(r)} \mu_r = 0, \quad \sum_{1}^{2}{}_r\, \alpha^{(r)} \bar{\mu}_r = -2\,\delta\,\gamma$$

$$\sum_{1}^{2}{}_r\, \beta^{(r)} \mu_r = -2\,\delta(\gamma), \quad \sum_{1}^{2}{}_r\, \beta^{(r)} \bar{\mu}_r = 0$$

ed equivalgono alle

$$\alpha_r = -2\,\delta\,\gamma\,\bar{\mu}_r, \quad \beta_r = -2\,\delta(\gamma)\,\mu_r \qquad 18)$$

con γ e (γ) designando le curvature geodetiche delle linee μ_r e $\bar{\mu}_r$.

Per la (16) queste ci danno le

$$\frac{d \log \sqrt{\delta}}{dx_r} = (\gamma)\,\mu_r - \gamma\,\bar{\mu}_r = -\Psi_r \qquad 18'),$$

dalle quali risulta (§87) che il fascio ψ_r è isotermo.

Le (18) ci dicono che non può essere $\delta = 0$ senza che α e β siano costanti ed uguali fra di loro, nel qual caso le (15) assumono la forma $c_{rs} = c\,a_{rs}$ e, per le ragioni dette, queste espressioni per gli elementi c_{rs} sono da rifiutare. Le (18) stesse equivalgono alle

$$\bar{\alpha}_r = 2\,\delta\,\gamma\,\mu_r, \quad \bar{\beta}_r = -2\,\delta(\gamma)\,\bar{\mu}_r,$$

da cui si traggono le

$$\bar{\alpha}_{rs} = 2\,\delta\,\gamma_s\,\mu_r + 2\,\delta\,\gamma\,\bar{\mu}_r\,\psi_s + 2\,\gamma\,\mu_r\,\delta_s$$

$$\bar{\beta}_{rs} = 2\,\delta(\gamma)_s\,\bar{\mu}_r + 2\,\delta(\gamma)\,\mu_r\,\psi_s - 2(\gamma)\,\bar{\mu}_r\,\delta_s.$$

Perchè il sistema delle (18), in cui per δ si intenda posta la espressione data dalla (16), sia completo è dunque necessario e sufficiente (§42) che

siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{d\gamma}{ds} = -3\gamma(\gamma), \quad \frac{\delta(\gamma)}{\delta s} = 3\gamma(\gamma), \qquad 19)$$

indicando con ds e δs gli elementi lineari delle linee μ_r e $\bar{\mu}_r$, con d e δ le variazioni di una funzione qualunque dovute a spostamenti positivi infinitesimi secondo le stesse linee.

Osserviamo ancora che per integrare il sistema simultaneo (18) sarà opportuno integrare il sistema (18_1), che comprende una sola funzione incognita $\underline{\delta}$, e poi il sistema

$$\alpha_r = -2\delta\gamma\bar{\mu}_r, \qquad 18_2)$$

dopo avervi posto per $\underline{\delta}$ il valore già determinato. Tanto la integrazione delle (18_1) come quella delle (18_2) non richiederà che semplici quadrature.

Se $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ è un sistema integrale particolare del sistema (18) e con c_1 e c_2 si indicano delle costanti arbitrarie, come è facile riconoscere, il sistema integrale generale si ha ponendo

$$\alpha = c_1\alpha_0 + c_2 ; \quad \beta = c_1\beta_0 + c_2 .$$

Siccome poi questi valori di α e β sostituiti nelle (15) danno per le c_{rs} espressioni della forma

$$c_{rs} = c_1(\alpha_0\mu_r\mu_s + \beta_0\bar{\mu}_r\bar{\mu}_s) + c_2\, a_{rs} ;$$

per le considerazioni svolte sopra potremo senza tor nulla alla generalità dei risultati supporre $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Avendo presente anche la (14_1) potremo dunque concludere che

„Ad ogni congruenza di linee μ_r dotata „della proprietà rappresentata dalle equazioni „(19) corrisponde uno ed un solo integrale primo quadratico per la equazione delle geodetiche. Esso è dato dalla equazione

$$\alpha \cos^2 \vartheta + \beta \operatorname{sen}^2 \vartheta = c ,$$

„in cui con α e β si rappresenta un sistema integrale particolare delle equazioni (18), con ϑ l'angolo che le linee μ_r fanno colle geodetiche, con „c una costante arbitraria.

„Reciprocamente se la (14_1) ci dà un integrale primo per la equazione delle geodetiche, la „congruenza μ_r è dotata della proprietà rappresentata dalle equazioni (18).„

„Aggiungasi che, nota la congruenza μ_r, la „determinazione dell'integrale (14_1) non richiede che semplici quadrature."

104. Sul piano e quindi su tutte le superficie sviluppabili la equazione delle geodetiche può mettersi sotto la forma

$$a x + b y + c = 0$$

a, b e c essendo costanti arbitrarie. Considerando x ed y, anzi che come coordinate, come funzioni di due coordinate generali x_1, x_2, possiamo quindi asserire che sulle superficie sviluppabili la equazione generale delle geodetiche si ottiene eguagliando a o una funzione lineare a coefficienti costanti arbitrarie di due certe funzioni indipendenti delle coordinate 1 2. Il Beltrami ha dimostrato che la stessa proprietà appartiene a tutte le superficie a curvatura totale costante e solamente ad esse. Daremo ora la dimostrazione di questo importante teorema.

Essendo u_1 ed u_2 due funzioni indipendenti delle coordinate x_1 x_2 delle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$; c, c_1 e c_2 tre costanti arbitrarie, supponiamo che

$$\sum_{1}^{2}{}_h c_h u_h = c, \qquad A)$$

sia l'integrale generale della equazione delle geodetiche per le superficie stesse. Un integrale primo della medesima equazione sarà rappresentato dalla

$$\sum_{1}^{2}{}_h c_h \sum_{1}^{2}{}_r u_{h|r} \, dx_r = 0,$$

la quale, indicando al solito con $\lambda^{(r)}$ il sistema coordinato controvariante di una congruenza geodetica qualunque, potrà scriversi così

$$\sum_{1}^{2}{}_h c_h \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} u_{h|r} = 0 . \qquad 29)$$

Questa derivata di nuovo dà le

$$\sum_{1}^{2}{}_h c_h \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} u_{h|rs} + \sum_{1}^{2}{}_h c_h \sum_{1}^{2}{}_r u_h^{(r)} \lambda_{rs} = 0 .$$

La equazione (g) delle geodetiche assume dunque in questo caso la forma

$$\sum_{1}^{2}{}_h c_h \sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} u_{h|rs} = 0 .$$

Questa dovendo essere identicamente soddisfatta, tenuto conto della (1) e della (21), dovranno per la sola (1) risultare identicamente soddisfatte le

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} u_{h|rs} = v_h \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} u_{h|r} .$$

Osservando che $\sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} u_{h|r}$ è un invariante e avendo presente la (1) queste si possono mettere sotto la forma

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} u_{h|rs} = v_h \sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} a_{rs} ,$$

indicando ancora con v_1 e v_2 due indeterminate. Le funzioni u_h dovranno dunque soddisfare ad equazioni della forma

$$u_{h|rs} = v_h \, a_{rs} . \qquad 22)$$

Da queste si traggono le

$$u_{h|rst} = a_{rs} \, v_{h|t}$$

e quindi per le (1) e (4) del § 40 le

$$u_{h|r21} - u_{h|r12} + \sqrt{a}\,\bar{V}_{h|r} = 0$$

e le

$$\bar{v}_{h|r} + G\,\bar{u}_{h|r} = 0\,; \qquad 22,)$$

$$\bar{v}_{h|rs} + G\,\bar{u}_{h|rs} + G_s\,\bar{u}_{h|r} = 0\,.$$

Dovremo dunque avere (§ 42)

$$\sum_{1}^{2}{}_{r}\, G^{(r)}\,\bar{u}_{h|r} = 0$$
$$(h = 1, 2)$$

e quindi, poichè con u_1 ed u_2 abbiamo designate due funzioni indipendenti di x_1 ed x_2, le $G_r = 0$, cioè $G =$ costante, come volevamo dimostrare.

Dalla dimostrazione, che qui abbiamo data del teorema di Beltrami, risulta ancora che perchè l'equazione (A) rappresenti l'integrale generale della equazione delle geodetiche per una superficie a curvatura costante basta che u_1 ed u_2 posti in luogo di u soddisfacciano ad un sistema di equazioni della forma

$$u_{rs} = v\,a_{rs}$$
$$v_r + G\,u_r = 0$$
$$(r, s = 1, 2),$$

nelle quali v rappresenta un'altra funzione incognita

Capitolo Settimo

Delle congruenze isoterme di Liouville.

Proprietà caratteristica delle congruenze isoterme di Liouville. Espressione, che per esse assume la forma fondamentale.

Teorema del Dini. Sistemi isotermi di Liouville sulle superficie a curvatura costante. Sistemi isotermi di Liouville sulle superficie a curvatura variabile. Superficie dotate di una doppia o di una semplice infinità di congruenze isoterme di Liouville. Superficie dotate di una sola congruenza isoterma di Liouville.

---

106. Dal capitolo precedente risulta di quanta importanza siano per la integrazione della equazione delle geodetiche quelle congruenze λ_r, per le quali sono soddisfatte le equazioni

$$\frac{d\gamma}{ds} = -3\gamma(\gamma), \quad \frac{\delta(\gamma)}{\delta s} = 3\gamma(\gamma), \qquad 1)$$

designandosi con γ e (γ) le curvature geodetiche rispettivamente delle linee λ_r e $\overline{\lambda}_r$, con ds e δs gli elementi lineari di queste, con $d\mu$ e $\delta\mu$ le variazioni di una funzione qualunque μ dovute a spostamenti infinitesimi positivi rispettivamente secondo le linee λ_r e $\overline{\lambda}_r$. Di queste congruenze ci occuperemo perciò diffusamente in questo Capitolo.

Come già osservammo e, come si potrebbe de-

durre dalle (1) (§ 92) le congruenze di cui si tratta sono isoterme. Noi le chiameremo congruenze isoterme di Liouville.

Le (1) sono simmetriche rispetto ai due sistemi λ_r e $\overline{\lambda}_r$ e però possiamo prima di tutto concludere che

„ Se una data congruenza è una congruenza isoterma di Liouville, tale è pure la congruenza ad essa ortogonale."

Richiamando ora le formole del § 103 osserviamo che, per le (18_1), $-\log\delta$ è la funzione, che ha per derivate le $\overline{\varphi}_r$. Da ciò e dal § 88 risulta che, posto

$$\overline{\mu}_r = \sqrt{\delta}\, u_r\,,\ \mu_r = \sqrt{\delta}\, v_r\,, \qquad 2)$$

u e v sono parametri isometrici rispettivamente delle linee μ_r e $\overline{\mu}_r$, e che la espressione della forma fondamentale φ in coordinate u e v è

$$\varphi = ds^2 = (\alpha - \beta)\,(du^2 + dv^2) \qquad \mathcal{L})$$

Siccome poi le (18) del § 103 dànno

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\delta\beta}{\delta s} = \cdot$$

cioè, essendo

$$ds = \sqrt{\alpha - \beta}\; dv,\ \delta s = \sqrt{\alpha - \beta}\; du\,,$$

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\beta}{du} = 0\,,$$

vediamo che nella $(\mathcal{L})$ α e β sono funzioni rispettivamente di u e di v soltanto.

Si supponga reciprocamente che u e v siano tali

coordinate, per cui φ assuma una espressione della forma (L), α e β essendo rispettivamente funzioni di u e v soltanto. Essi saranno parametri isometrici di due sistemi isotermi e però (§ 88) posto

$$\delta = \alpha - \beta \qquad 3)$$

e con μ_r e $\overline{\mu}_r$ indicando i sistemi coordinati covarianti rispettivamente delle linee u e delle v, varranno le

$$\frac{d \log \sqrt{\delta}}{dx_r} = -\overline{\varphi}_r \qquad 4)$$

e le (2). Adottando per le derivate successive di α e β la notazione cogli apici dalla (3) ricaviamo le

$$\delta_r = \alpha' u_r - \beta' v_r ,$$

e quindi per le (2) e (4) le

$$2\,\delta^{\frac{3}{2}}\,\overline{\varphi}_r = \beta' \mu_r - \alpha' \overline{\mu}_r ,$$

o le equivalenti

$$2\,\delta^{\frac{3}{2}}\,\varphi_r = -\beta' \overline{\mu}_r - \alpha' \mu_r ;$$

o, in fine le

$$2\,\delta^{\frac{3}{2}}\,\gamma = -\alpha' ,\; 2\,\delta^{\frac{3}{2}}(\gamma) = -\beta' .$$

Da queste, derivando ancora rispetto ad x_r ed avendo presenti le (4), si ricavano le

$$2\,\delta^2 \left\{ \gamma_r + 3\,\gamma(\gamma)\,\mu_r - 3\,\gamma^2 \overline{\mu}_r \right\} = -\alpha'' \overline{\mu}_r$$

$$2\,\delta^2 \left\{ (\gamma)_r + 3(\gamma)^2 \mu_r - 3\,\gamma(\gamma)\,\overline{\mu}_r \right\} = -\beta'' \mu_r ,$$

le quali contengono le (1).

Abbiamo dunque dimostrato che:

"Le congruenze isoterme di Liouville sono tut-

„ te e soltanto quelle, le cui linee assunte come coor=
„ dinate assieme alle loro traiettorie ortogonali,
„ sono capaci di dare alla forma fondamentale u=
„ na espressione del tipo

$$\varphi = \{\alpha(u) - \beta(v)\}(du^2 + dv^2).$$

Dal § 103 risulta ancora che:

„ Ridotta la espressione della forma fondamen=
„ tale al tipo indicato nel teorema precedente
„ ed indicando con ϑ l'angolo, che le linee u fan=
„ no con quelle di una congruenza geodetica
„ qualunque, con c una costante arbitraria si ha
„ un integrale primo per la equazione delle geo=
„ detiche ponendo

$$\alpha \cos^2\vartheta + \beta \operatorname{sen}^2\vartheta = c \,. \text{"}$$

Osserviamo ancora che, posto

$$2x = u + iv, \; 2y = u - iv,$$

la espressione ($\mathfrak{L}$) assume la forma

$$\varphi = ds^2 = \{U(x+y) - V(x-y)\} dx\,dy \qquad (\mathfrak{L}_1)$$

Vediamo così che le condizioni necessarie e suffi=
cienti perchè la forma fondamentale ammetta
una espressione del tipo ($\mathfrak{L}$) coincidono con quel=
le necessarie e sufficienti perchè, scelti opportuna=
mente i parametri delle linee di lunghezza nul=
la (§ 58), la forma stessa assuma una espressione
del tipo ($\mathfrak{L}_1$).

107. Nella (L) ai parametri $\underline{u}$ e $\underline{v}$ si sostituiscano due nuovi parametri

$$u_1 = u_1(u)\,,\ v_1 = v_1(v)$$

tali che si abbia

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2 = \alpha - \beta\,.$$

Posto

$$\operatorname{sen}\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}\frac{du}{du_1}\,,\quad \cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}}\frac{dv_1}{dv}\,,$$

essa assume la forma

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{\operatorname{sen}^2\frac{w}{2}} + \frac{dv_1^2}{\cos^2\frac{w}{2}}\,; \qquad 5)$$

la quale ci dice (§ 86) che le linee $\underline{u}$ e $\underline{v}$ costituiscono un sistema ortogonale di ellissi ed iperboli geodetiche.

E' facile riconoscere reciprocamente che due congruenze ortogonali di ellissi ed iperboli geodetiche, se isoterme, sono congruenze isoterme di Liouville.

Infatti se nella (5) si suppone che le linee u_1 e v_1 appartengano ad un fascio isotermo, si avrà (§ 90).

$$\frac{\operatorname{sen}^2\frac{w}{2}}{\cos^2\frac{w}{2}} = \frac{\psi^2(u_1)}{\chi^2(v_1)}\,,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2\frac{w}{2} = \frac{\psi^2}{\chi^2+\psi^2}\,,\quad \cos^2\frac{w}{2} = \frac{\chi^2}{\chi^2+\psi^2}$$

e ponendo

$$u = \int\frac{du_1}{\psi(u_1)}\,,\quad v = \int\frac{dv_1}{\psi(v_1)}\,,$$

si avrà ancora

$$\frac{du_1^2}{\operatorname{sen}^2\frac{w}{2}} = (\psi^2+\chi^2)\,du^2\,,$$

$$\frac{dv_1^2}{\cos^2\frac{w}{2}} = (\psi^2+\chi^2)\,dv^2\,;$$

e la (5) si ridurrà al tipo ($\mathcal{L}$). Così si è dimostrato il seguente teorema dovuto al Dini.

„Ogni coppia di congruenze ortogonali ed isoterme di Liouville risulta di ellissi e di iperboli geodetiche."

108. Nei paragrafi, che seguono risolveremo il seguente problema:

„Data una forma differenziale quadratica binaria positiva

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

„riconoscere se sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ esistono delle congruenze isoterme di Liouville e, nel caso affermativo, determinarle tutte."

È facile riconoscere che, indicando con α una indeterminata, le congruenze isoterme di Liouville sono tutte e soltanto quelle, i cui sistemi coordinati λ_r soddisfanno al sistema di equazioni:

$$\sum_{1}^{2}{}_r\, \lambda^{(r)} \lambda_r = 1 \qquad a)$$

$$\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \{ \gamma \lambda_s + (\gamma) \bar{\lambda}_s \} \qquad b)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{1}^{2}{}_r\, \gamma^{(r)} \lambda_r = -3\gamma(\gamma)\,; \quad \sum_{1}^{2}{}_r\, \gamma^{(r)} \bar{\lambda}_r = \frac{1}{2}(\alpha + G) + \gamma^2 \\ \sum_{1}^{2}{}_r\, (\gamma)^{(r)} \lambda_r = \frac{1}{2}(\alpha - G) - (\gamma)^2\,; \quad \sum_{1}^{2}{}_r\, (\gamma)^{(r)} \bar{\lambda}_r = 3\gamma(\gamma) \end{array}\right\} \qquad c)$$

Infatti, mentre le (b) scendono per derivazione dalla (a), e due delle (c) non sono che le equazioni caratteristiche (1) delle congruenze isoterme di Liou-

ville, le altre due, eliminata α, riproducono la (15) del § 43, la quale (§ 41 e 42) proviene dalla eliminazione delle derivate prime e seconde delle λ_r tra le equazioni, che si ottengono derivando le (b).

Segue da ciò che il problema, che ci siamo proposti, coincide analiticamente con quello che concerne la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti perchè sia integrabile il sistema di equazioni (a, b, c), in cui si riguardino come incognite le λ_r, γ, (γ) ed α, mentre le $\overline{\lambda}_r$ debbono intendersi sostituite dalle loro espressioni per le λ_r e per i coefficienti di φ; e la effettiva integrazione del sistema stesso, verificate quelle condizioni. — Per risolvere poi questo ultimo problema verremo aggiungendo al sistema, di cui si tratta, tutte le equazioni da esso indipendenti, e che si ottengono derivando le (c) ed eliminando tra le nuove equazioni le derivate prime e seconde di γ e (γ); ed operando in modo analogo sulle nuove equazioni così ottenute. Così in pari tempo stabiliremo le condizioni di integrabilità del sistema (a, b, c), e troveremo i sistemi completi, la cui integrazione, soddisfatte quelle condizioni, ci darà tutti i sistemi isotermi di Liouville, di cui sono dotate le superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$:

Le equazioni (c) equivalgono alle

$$2\,\overline{\gamma}_r = -2\,\gamma\varphi_r - 4\gamma(\gamma)\,\overline{\lambda}_r + (\alpha - \varrho)\,\lambda_r$$
$$2\,(\overline{\gamma})_r = -2(\gamma)\varphi_r - 4\,\gamma(\gamma)\,\lambda_r - (\alpha + \varrho)\,\lambda_r\,.$$

Applicando il noto teorema del § 42 ed osservando che dalle (c) stesse scendono le

$$2\sum_r (\gamma(\gamma))_r\,\lambda^{(r)} = -\gamma(\alpha + \varrho + 8(\gamma)^2)$$
$$2\sum_r (\gamma(\gamma))_r\,\overline{\lambda}^{(r)} = (\gamma)(\varrho - \alpha + 8\,\gamma^2)$$
$$2\sum_r \gamma^{(r)}\varphi_r = (\gamma)(\varrho - \alpha - 4\,\gamma^2)$$
$$2\sum_r (\gamma)^{(r)}\varphi_r = -\,\gamma(\varrho + \alpha - 4(\gamma)^2)\,,$$

troviamo come risultato della derivazione delle (c) e della eliminazione tra esse delle derivate prime e seconde di γ e (γ) le

$$\left.\begin{aligned}\sum_r \alpha^{(r)}\lambda_r &= \sum_r \varrho^{(r)}\lambda_r + 4\,(\gamma)\left\{2\,\gamma^2 + \varrho - \alpha\right\}\\ \sum_r \alpha^{(r)}\overline{\lambda}_r &= -\sum_r \varrho^{(r)}\overline{\lambda}_r + 4\,\gamma\,\left\{2(\gamma)^2 + \varrho + \alpha\right\}.\end{aligned}\right\}\; d).$$

A queste sostituiamo al solito le equivalenti

$$\overline{\alpha}_r = \sum_p \varrho^{(p)}(\lambda_p\,\overline{\lambda}_r + \overline{\lambda}_p\,\lambda_r) + 8\,\gamma(\gamma)\,\overline{\varphi}_r - 4\alpha\varphi_r + 4\varrho\left\{(\gamma)\overline{\lambda}_r - \gamma\lambda_r\right\}$$

ed applichiamo il teorema del § 42.

Osservando che per le (c) e (d) si ha

$$2\sum_s (\gamma(\gamma))_s\,\overline{\varphi}^{(s)} = 8\,\gamma(\gamma)\left\{\gamma^2 + (\gamma)^2\right\} + 2\,\varrho\,\gamma(\gamma)$$
$$\sum_s \alpha^{(s)}\varphi_s = 8\,\gamma(\gamma)\left\{\gamma^2 + (\gamma)^2\right\} + 8\,\varrho\,\gamma(\gamma) + \gamma\sum_p \varrho^{(p)}\lambda_p - (\gamma)\sum_p \varrho^{(p)}\overline{\lambda}_p$$

perveniamo così alla equazione

$$5\left\{(\gamma)\sum_p \varrho^{(p)}\overline{\lambda}_p - \gamma\sum_p \varrho^{(p)}\lambda_p\right\} + \sum_{pq} \varrho^{(pq)}\lambda_p\,\overline{\lambda}_q = 0 \qquad e),$$

la quale, se non è identicamente soddisfatta, dovrà aggiungersi ancora alle (a), (b) (c) e (d).

169. La (e) è identicamente soddisfatta, se ϱ è costan-

te e, come vedremo, in questo caso soltanto. Il sistema di equazioni (a, b, c, d) risulta allora completo ed il suo integrale generale contiene quattro costanti arbitrarie. Se (d) assumono poi la forma

$$\left.\begin{aligned}\sum_r \alpha^{(r)} \lambda_r &= 4\,(\gamma)\,(2\,\gamma^2 + \mathcal{G} - \alpha)\\ \sum_r \alpha^{(r)} \overline{\lambda}_r &= 4\,\gamma\,\{2(\gamma)^2 + \mathcal{G} + \alpha\}\end{aligned}\right\} \quad d_1)$$

e però si ha il teorema

„ Sulle superficie a curvatura costante esiste „ un numero ∞^4 di congruenze isoterme di Liouville. I loro sistemi coordinati si ottengono integrando il sistema di equazioni (a, b, c, d_1). „

110. Si supponga ora $\mathcal{G}$ variabile e si ponga

$$\Delta_1 \mathcal{G} \cdot k_r = \mathcal{G}_r\,, \qquad 6)$$

designando così con k_r il sistema coordinato covariante delle traiettorie ortogonali alle linee di parametro $\underline{\mathcal{G}}$. Si designino in pari tempo con $\underline{g}$ e (g) le curvature geodetiche rispettivamente delle linee k_r e $\overline{k}_r$ e si ponga

$$h = \frac{\Delta_2 \mathcal{G}}{\Delta_1 \mathcal{G}} - (g)\,.$$

Le formole (14) del § 43 assumeranno applicate alla funzione $\underline{\mathcal{G}}$ la forma

$$\frac{1}{\Delta_1 \mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}_{rs} = h\, k_r k_s + g\,(k_r \overline{k}_s + \overline{k}_r k_s) + (g)\, \overline{k}_r \overline{k}_s \qquad 7)$$

Indicando con ψ l'angolo, che le linee λ_r fanno colle k_r, avremo (§ 63)

$$\left.\begin{array}{l}\cos\psi = \sum_r k^{(r)}\lambda_r = \sum_r \bar{k}^{(r)}\bar{\lambda}_r \\ \operatorname{sen}\psi = \sum_r k^{(r)}\bar{\lambda}_r = -\sum_r \bar{k}^{(r)}\lambda_r ,\end{array}\right\} \quad 8)$$

e dalle (6) e (7)

$$\sum_p g^{(p)}\lambda_p = \Delta_1 g \cos\psi , \quad \sum_p g^{(p)}\bar{\lambda}_p = \Delta_1 g \operatorname{sen}\psi$$

$$\frac{1}{\Delta_1 g}\sum_{rs} g^{(rs)}\lambda_r\bar{\lambda}_s = g\cos 2\psi + \frac{h-(g)}{2}\operatorname{sen} 2\psi$$

La equazione (e) assumerà dunque la forma

$$5\left\{(\gamma)\operatorname{sen}\psi - \gamma\cos\psi\right\} + g\cos 2\psi + \frac{h-(g)}{2}\operatorname{sen}2\psi = 0 ,$$

e posto

$$2\,\nu = h-(g) \qquad 9)$$

e indicando con μ una indeterminata, potrà essere sostituita dalle

$$\left.\begin{array}{l}5\,\gamma = g\cos\psi + (\nu+\mu)\operatorname{sen}\psi \\ 5(\gamma) = -(\nu-\mu)\cos\psi + g\operatorname{sen}\psi\end{array}\right\} \quad e_1)$$

Queste equazioni esprimono le incognite γ e (γ) in funzione delle altre incognite, che appariscono nel sistema (c), e della incognita $\underline{\mu}$ ora introdotta; mentre la $\underline{\alpha}$, che appariva nelle (d), è scomparsa. Ci rimane quindi da stabilire le condizioni, sotto le quali la incognita $\underline{\mu}$ può soddisfare alle equazioni (c), tra cui la $\underline{\alpha}$ si intenderà eliminata. Queste equazioni si riducono ora a tre e ci dicono 1° che il sistema di elementi

$$\varphi_r = \gamma\,\lambda_r + (\gamma)\,\bar{\lambda}_r \qquad 10)$$

è il sistema coordinato covariante di un fascio di congruenze: 2° che questo fascio è isotermo: 3° che

la congruenza λ_r ad esso appartenente è una congruenza isoterma di Liouville. Esse possono quindi (§ 42 e 87) essere sostituite dal sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\varphi_{rs} &= 0 \\ \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\overline{\varphi}_{rs} &= \mathcal{G} \\ \sum_{1}^{2}{}_{r}\left\{(\gamma)^{(r)}\overline{\lambda}_r - \gamma^{(r)}\lambda_r\right\} &= b\,\gamma(\gamma) \end{aligned}\right\} \quad c_1)$$

Le (8) equivalgono alle

$$k_r = \cos\psi\,\lambda_r + \operatorname{sen}\psi\,\overline{\lambda}_r$$
$$\overline{k}_r = -\operatorname{sen}\psi\,\lambda_r + \cos\psi\,\overline{\lambda}_r\,,$$

per le quali, per le (c_1) e per le (9) le (10) assumono la forma

$$5\varphi_r = \chi_r - \frac{h+(g)}{2}\,\overline{k}_r + \mu\left(\operatorname{sen}2\psi\, k_r + \cos 2\psi\,\overline{k}_r\right) \quad 11)$$

indicando con χ_r gli elementi del sistema dedotto da quello di elementi k_r. Se ricordiamo (§ 72) le

$$\psi_r = \chi_r - \varphi_r \qquad I)$$

e deriviamo le (11) e le equivalenti

$$5\overline{\varphi}_r = \overline{\chi}_r + \frac{h+(g)}{2}\,k_r + \mu\left(\operatorname{sen}2\psi\,\overline{k}_r - \cos 2\psi\, k_r\right)$$

troviamo le

$$5\varphi_{rs} = \chi_{rs} - \frac{1}{2}\left\{h_s + (g)_s\right\}\overline{k}_r + \mu_s\left(\operatorname{sen}2\psi\, k_r + \cos 2\psi\,\overline{k}_r\right)$$
$$+\mu\left(\cos 2\psi\, k_r - \operatorname{sen}2\psi\,\overline{k}_r\right)\left(\chi_s - 2\varphi_s\right) + \frac{1}{2}\left(h+(g)\right)k_r\,\chi_s\,.$$
$$5\overline{\varphi}_{rs} = \overline{\chi}_{rs} + \frac{1}{2}\left\{h_s + (g)_s\right\}k_r + \mu_s\left(\operatorname{sen}2\psi\,\overline{k}_r - \cos 2\psi\, k_r\right)$$
$$+\mu\left(\cos 2\psi\,\overline{k}_r + \operatorname{sen}2\psi\, k_r\right)\left(\chi_s - 2\varphi_s\right) + \frac{1}{2}\left\{h+(g)\right\}\overline{k}_r\,\chi_s\,.$$

Se indichiamo con $\underline{q}$ l'anisotermia del fascio χ_r e (§ 42, 43, 88, 92) ricordiamo le identità

$$\sum_{1\,rs}^{2} a^{(rs)} \chi_{rs} = \mathcal{G}$$

$$\left.\begin{aligned} q = \sum_{1\,rs}^{2} a^{(rs)} \chi_{rs} &= \sum_{1\,r}^{2} g^{(r)} k_r + \sum_{1\,r}^{2} (g)^{(r)} \overline{k}_r \\ \sum_{1\,r}^{2} h^{(r)} \overline{k}_r &= g \left\{ h + (g) \right\} + \sum_{1\,r}^{2} g^{(r)} k_r , \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

facendo uso delle espressioni calcolate sopra per le φ_{rs} e $\overline{\varphi}_{rs}$ riduciamo le prime due delle formole (c_1) alla forma

$$\operatorname{sen} 2\psi \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} k_r + \cos 2\psi \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} \overline{k}_r = -\frac{1}{2} q + \frac{3}{5}\mu \left\{ (g) \operatorname{sen} 2\psi - g \cos 2\psi \right\} + \frac{h+(g)}{5} \mu \operatorname{sen} 2\psi$$

$$-\cos 2\psi \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} k_r + \operatorname{sen} 2\psi \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} \overline{k}_r = -\frac{1}{2} p + \frac{2}{5}\mu^2 - \frac{3}{5}\mu \left\{ (g) \cos 2\psi + g \operatorname{sen} 2\psi \right\} - \frac{h+(g)}{5} \mu \cos 2\psi ,$$

posto

$$p = \sum_{1\,r}^{2} (h + (g))^{r} k_r + (g)\,(h + (g)) - 8\,\mathcal{G}$$

Abbiamo dunque le

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} k_r &= \left(\frac{p}{2} - \frac{2}{5}\mu^2\right) \cos 2\psi - \frac{1}{2} q \operatorname{sen} 2\psi + \frac{3}{5}\mu (g) + \frac{1}{5}\mu (h + (g)) \\ \sum_{1\,r}^{2} \mu^{(r)} \overline{k}_r &= -\left(\frac{p}{2} - \frac{2}{5}\mu^2\right) \operatorname{sen} 2\psi - \frac{1}{2} q \cos 2\psi - \frac{3}{5}\mu g , \end{aligned}\right\} \quad II)$$

ovvero le

$$\overline{\mu}_r = \left(\frac{p}{2} - \frac{2}{5}\mu^2\right) (\operatorname{sen} 2\psi\, k_r + \cos 2\psi\, \overline{k}_r) + \frac{3}{5}\mu\, \chi_r$$
$$+ \frac{1}{2} q (\cos 2\psi\, k_r - \operatorname{sen} 2\psi\, \overline{k}_r) + \frac{1}{5}\mu \left\{ h + (g) \right\} \overline{k}_r .$$

Da queste applicando il noto teorema del § 42, scende le

$$-14\, q\, \mu = \mathcal{A} \operatorname{sen} 2\psi + \mathcal{B} \cos 2\psi , \qquad III)$$

posto

$$\rho = h + (g) \qquad 13)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= -6(p(g) + q g) - 2 p \rho + 5 \sum_{1\,r}^{2} p^{(r)} k_r - 5 \sum_{1\,r}^{2} q^{(r)} \overline{k}_r \\ \mathcal{B} &= 6\, (p g - q(g)) - 2 q \rho + 5 \sum_{1\,r}^{2} q^{(r)} k_r + 5 \sum_{1\,r}^{2} p^{(r)} \overline{k}_r \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Ci rimane ora di trasformare la 3ª delle equazio-

ni (c_1). A questo oggetto si osservi che, posto

$$\vartheta_r = (\gamma)\,\bar\lambda_r - \gamma\,\lambda_r\,, \qquad 15)$$

essa assume la forma

$$\sum_{rs}^{2}{}_{1}\, a^{(rs)}\vartheta_{rs} = 4\,\gamma(\gamma)\,. \qquad 16)$$

Per le (8) poi le (15) equivalgono alle

$$5\vartheta_r = \mu\,\bar k_r + g\,(\mathrm{sen}\,2\psi\,\bar k_r - \cos 2\psi\, k_r) - V(\mathrm{sen}\,2\psi\, k_r + \cos 2\psi\,\bar k_r)\,,$$

le quali derivate, ricordando le (12), dànno

$$5\sum_{rs} a^{(rs)}\vartheta_{rs} = \tfrac{2}{5}\,\mu^2\,\mathrm{sen}\,2\psi - \tfrac{1}{2}\,(p\,\mathrm{sen}\,2\psi + q\cos 2\psi) - 2g\mu$$
$$+\,\mathrm{sen}\,2\psi\,\Big(\sum_r g^{(r)}\bar k_r - \sum_r V^{(r)} k_r\Big) - \cos 2\psi\,\Big(\sum_r g^{(r)} k_r + \sum_r V^{(r)}\bar k_r\Big)$$
$$+\,\tfrac{3}{5}\,g\,\big(g\,\mathrm{sen}\,2\psi + (g)\cos 2\psi\big) + \tfrac{4}{2}\,\Big((g) - \tfrac{h}{5}\Big)\cos 2\psi$$
$$\tfrac{1}{5}\,V\,\big\{4(g) + h\big\}\,\mathrm{sen}\,2\psi\,.$$

Per questa e per le (e_1) la (16) si riduce facilmente alla forma

$$14\,g\,\mu = \mathcal{A}'\,\mathrm{sen}\,2\psi + \mathcal{B}'\cos 2\psi\,, \qquad IV)$$

posto

$$\mathcal{A}' = 6g^2 + 4V^2 + 25\,\mathcal{G} - 10\sum_{r}^{2}{}_{1}\, V^{(r)}k_r$$
$$\mathcal{B}' = -2gV - 10\sum_r g^{(r)}k_r\,.$$

111. Riassumendo i risultati del paragrafo precedente, vediamo che nel caso di $\underline{\mathcal{G}}$ variabile, perchè esistano delle congruenze isoterme di Liouville è necessario e basta che esistano due funzioni $\underline{\mu}$ e $\underline{\psi}$, le quali soddisfacciano al sistema di equazioni (I, II, III, IV); quando nelle (I) alle φ_r si intendano sostituite le espressioni date dalle (11). Se tali funzioni esistono e si pone

$$\lambda_r = \cos\psi\, k_r - \mathrm{sen}\,\psi\,\bar k_r\,, \qquad 17)$$

i sistemi di elementi λ_r e $\bar{\lambda}_r$ sono i sistemi coordinati covarianti di due congruenze ortogonali isoterme di Liouville. Ci rimane quindi soltanto da esaminare in quali casi il detto sistema ammetta delle soluzioni; e da stabilire per ogni caso il numero delle soluzioni ed il modo di ottenerle tutte.

Si supponga in prima che $\sqrt{\varphi}$ sia l'elemento lineare di una superficie di rotazione, nel qual caso si ha (§ 102)

$$q = g = 0 .$$

Si riconosce allora facilmente che le equazioni sopra ricordate sono soddisfatte per $\psi = 0$ e $\mu = 4(g) + \frac{1}{2}\{h + (g)\}$. E infatti tanto la espressione assunta dal quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione quando come linee coordinate si assumano i meridiani ed i paralleli (§ 57), quanto la esistenza dell'integrale lineare per l'equazione delle geodetiche nelle superficie, di cui si tratta, (§ 101 e 102) ci avvertono che per le superficie di rotazione a curvatura totale variabile, le linee di parametro $\underline{G}$ e quindi anche le loro traiettorie ortogonali costituiscono una congruenza isoterma di Liouville.

Prescindendo da queste, possiamo supporre ψ

diverso da 0 e da $\frac{\pi}{2}$. Se osserviamo ancora che la equazione (15) del § 43 e le (12) danno nel nostro caso

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{1}^{2}{}_{r}(g)^{r}k_{r}+(g)^{2}+\mathcal{G}=0\\&\sum_{1}^{2}{}_{r}h^{(r)}\bar{k}_{r}=\sum_{1}^{2}{}_{r}(g)^{(r)}\bar{k}_{r}=0,\end{aligned}\right\}\qquad 18)$$

vediamo che la equazione (IV) assume la forma

$$5\sum_{r}h^{(r)}k_{r}=h^{2}-2\,h(g)-h(g)^{2}+20\,\mathcal{G}\,;\qquad \alpha)$$

per la quale si ha

$$5\,p=h^{2}+3\,h(g)-4(g)^{2}-25\,\mathcal{G}\,.\qquad 19)$$

Tenendo conto poi di questa espressione di p e delle (18), la (III) si riduce alla seguente

$$25\,\Delta_{1}\,\mathcal{G}=3\left\{h+4(g)\right\}\left\{5\,\mathcal{G}-2\,(g)\,V\right\}\qquad \beta)$$

Le equazioni (α) e (β) non contengono le funzioni incognite μ e ψ e rappresentano quindi le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema che risulta delle (I) e delle (II), sia completo e perchè la congruenza, il cui sistema coordinato covariante è dato dalle (17), sia una congruenza isoterma di Liouville. Verificate queste condizioni, il sistema integrale generale del sistema (I, II) contiene due costanti arbitrarie, e tenendo conto della forma speciale, che esso assume nel caso qui considerato, possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente teorema:

„ Perchè una superficie a curvatura totale variabi-

„ le applicabile sopra una superficie di rotazione sia
„ dotata di altre congruenze isoterme di Liouville
„ oltre a quelle, che risultano dalle deformate dei
„ meridiani e dei paralleli, è necessario e basta
„ che siano soddisfatte le condizioni (α) e (β). In
„ questo caso poi sulla superficie, di cui si tratta,
„ esistono ∞^2 congruenze isoterme di Liouville,
„ i cui sistemi coordinati covarianti sono dati
„ dalle formole

$$\lambda_r = \cos\psi\, k_r - \operatorname{sen}\psi\, \bar{k}_r ,$$

„ il valore di ψ essendo fornito dal sistema inte=
„ grale generale del sistema completo

$$5\,\psi_r = \frac{h+g(q)}{2}\,\bar{k}_r - \mu\left(\operatorname{sen} 2\psi\, k_r + \cos 2\psi\, \bar{k}_r\right)$$

$$5\,\mu_r = \left(\frac{p}{2} - 2\mu^2\right)\left(\cos 2\psi\, k_r - \operatorname{sen} 2\psi\, \bar{k}_r\right) + \mu\left\{h + 4(g)\right\} k_r ,$$

„ in cui p è dato dalla (19).

112. Si supponga ora $g = 0$ e $q \lessgtr 0$. In questo caso il fascio χ_r non essendo isotermo, la congruenza k_r non può essere una congruenza isoterma di Liouville e noi possiamo supporre $\operatorname{sen}\psi \lessgtr 0$. La equazione (IV) assume quindi la forma

$$10 \sum_1^2{}_r\, V^{(r)} k_r = 4\, V^2 + 25\, \mathcal{G} ; \qquad 20)$$

mentre la prima delle (18) che sussiste anche in questo caso, e l'ultima delle (12) dànno

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^2{}_r (g)^r k_r &= -(g)^2 - \mathcal{G} \\ \sum_1^2{}_r h^{(r)} \bar{k}_r &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad 21)$$

Ricordando la (9), la (20) si riduce facilmente alla forma

$$5 \sum_{1}^{2}{}_{r} h^{(r)} k_r = 4\, v^2 + 20\, G - 5\,(g)^2 ,$$

ed assieme alla seconda delle (21) ci dà le

$$5\, \overline{h}_r = \left\{ 4\, v^2 + 20\, G - 5 (g)^2 \right\} \overline{k}_r .$$

Da queste, applicando il noto teorema del § 42, scende la

$$2\, v \sum_r v^{(r)} \overline{k}_r = 5 (g) \sum_{1}^{2}{}_{r} (g)^{(r)} \overline{k}_r$$

ovvero

$$\left\{ 5(g) - h \right\} \sum_{1}^{2}{}_{r} (g)^{(r)} \overline{k}_r = 0 .$$

Questa, ricordando ancora la seconda delle (21), riconduce in ogni caso alla

$$\sum_{1}^{2}{}_{r} (g)^{(r)} \overline{k}_r = 0$$

e quindi per la seconda delle (12) alla $q = 0$, contro la ipotesi fatta. Possiamo dunque concludere che:

„ Tra le superficie a curvatura variabile $\underline{G}$, per „ le quali le linee di parametro G sono parallele, „ quelle applicabili sopra superficie di rotazione „ sono le sole dotate di congruenze isoterme di Liou„ville. „

113. Il teorema del paragrafo precedente ci permette di limitare d'ora in avanti la ricerca delle congruenze isoterme di Liouville a quelle superficie a curvatura variabile, per le quali $\underline{g}$ è diverso da $\underline{0}$, sulle quali cioè le linee di parametro $\underline{G}$ non sono parallele.

Il confronto delle equazioni (III) e (IV) ci conduce alla

$$(g\mathcal{A}+q\mathcal{A}')\,\text{sen}\,2\psi+(g\mathcal{B}+q\mathcal{B}')\,\text{sen}\,2\psi=0 \qquad 22)$$

Supponiamo in prima identicamente soddisfatte le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} g\,\mathcal{A}+q\,\mathcal{A}'=0 \\ g\,\mathcal{B}+q\,\mathcal{B}'=0 \end{array}\right\} \quad 23)$$

Poichè ora supponiamo g diverso da 0, la (III) sarà conseguenza della (IV), la quale determinerà μ e perchè sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ esistano delle congruenze isoterme di Liouville sarà necessario e sufficiente che, sostituito questo valore di μ nelle (I) e (II), queste equazioni, che conterranno oramai la sola incognita ψ, siano compatibili fra di loro.

Si supponga in prima che per la detta sostituzione le (II) risultino identicamente soddisfatte. In tal caso le (I) dopo la sostituzione stessa verranno a costituire un sistema completo, il cui integrale generale conterrà una costante arbitraria; e però le superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ ammetteranno una infinità semplice di congruenze isoterme di Liouville, che si otterranno dalle (17) ponendovi per ψ appunto quell'integrale.

Se poniamo

$$14\,g\,\mathcal{P} = \mathcal{A}', \quad 14\,g\,\mathcal{Q} = \mathcal{B}'$$

la (IV) assumerà la forma

$$\mu = \mathcal{P} \operatorname{sen} 2\psi + \mathcal{Q} \cos 2\psi \qquad (IV_1)$$

mercè questa, le (II) potranno essere sostituite dalle

$$5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mu^{(r)} k_r = \frac{5}{2} (p \cos 2\psi - q \operatorname{sen} 2\psi) + 2\mu \operatorname{sen} 2\psi (\mathcal{Q} \operatorname{sen} 2\psi - \mathcal{P} \cos 2\psi)$$
$$+ \{4(g) + h - 2\mathcal{Q}\}\, \mu$$

$$5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mu^{(r)} \bar{k}_r = -\frac{5}{2} (p \operatorname{sen} 2\psi + q \cos 2\psi) + 2\mu \cos 2\psi (\mathcal{Q} \operatorname{sen} 2\psi - \mathcal{P} \cos 2\psi)$$
$$+ \{2\mathcal{P} - 3g)\, \mu .$$

Se si confrontano queste colle espressioni dei primi membri dedotte per derivazione dalla (IV$_1$), ricordando le (I) e le (11), e si sostituisce ancora a μ la espressione (IV$_1$), posto

$$\mathcal{C} = 5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mathcal{P}^{(r)} k_r + \frac{5}{2} q - 8g\mathcal{Q} + \{2\mathcal{Q} - 4(g) - h\}\, \mathcal{P}$$

$$\mathcal{D} = 5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mathcal{Q}^{(r)} k_r - \frac{5}{2} p + 8g\mathcal{P} + \{2\mathcal{Q} - 4(g) - h\}\, \mathcal{Q}$$

$$\mathcal{C}' = 5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mathcal{P}^{(r)} \bar{k}_r + \frac{5}{2} p - 2\{4(g) - v\}\, \mathcal{Q} + 2\mathcal{P} - 3g\, \mathcal{P}$$

$$\mathcal{D}' = 5 \sum_{1}^{2} {}_r\, \mathcal{Q}^{(r)} \bar{k}_r + \frac{5}{2} q + 2\{4(g) - v\}\, \mathcal{Q} + (2\mathcal{P} - 3g)\, \mathcal{Q} .$$

si perviene alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C} \operatorname{sen} 2\psi + \mathcal{D} \cos 2\psi = 0 \\ \mathcal{C}' \operatorname{sen} 2\psi + \mathcal{D}' \cos 2\psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad 24$$

Se ne conclude che

" Le equazioni

$$\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{C}' = \mathcal{D}' = 0$$

„ rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti
„ perchè sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ sup:
„ poste a curvatura totale variabile e non appli:
„ cabili sopra superficie di rotazione esista una
„ infinità semplice di congruenze isoterme di
„ Liouville. Per determinarle tutte basta integra:
„ re il sistema completo.

$$5\,\psi_r = 4\,\chi_r + \frac{h+(q)}{2}\,\bar{k}_r + \mu\,(\operatorname{sen} 2\psi\, k_r + \cos 2\psi\, \bar{k}_r)\,,$$

„ nel quale per μ si intenda sostituita la espressio:
„ ne data dalla (IV)."

Aggiungiamo che, come segue dalle consi:
derazioni svolte sopra, le (23) risulteranno iden:
ticamente soddisfatte per le superficie, di cui è
fatta parola nel teorema.

114. Se le equazioni (23) non sono identicamen:
te soddisfatte, la equazione (22) dà per l'angolo
2ψ fra 0 e 2π due valori, la cui differenza è π;
i quali sostituiti nelle (7) definiscono due con:
gruenze fra loro ortogonali. La stessa cosa av:
viene per le equazioni (24), se si ha la identità:

$$\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}' = \mathfrak{C}'\,\mathfrak{D}\,,$$

senza che si annullino separatamente tutti i
coefficienti $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}'$ e $\mathfrak{D}'$. — Nell'un caso e nell'al:
tro quindi le superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ am:
metteranno due e due sole congruenze isoterme

di Liouville, naturalmente fra loro ortogonali, se tali sono quelle determinate, come si è detto, o dalla equazione (22) o dalla (24). Per assicurarsi poi di ciò basterà osservare se dalle congruenze, di cui si tratta, sono o non sono soddisfatte le condizioni espresse dalle equazioni (1).

115. Dal Capitolo precedente risulta che p integrali quadratici omogenei indipendenti per la equazione delle geodetiche danno un numero p-1 volte infinito di integrali della stessa natura. E poichè ad ogni coppia di congruenze isoterme di Liouville fra loro ortogonali corrisponde (§100) uno ed un solo integrale quadratico per la equazione delle geodetiche, possiamo concludere che per ogni superficie il numero degli integrali quadratici per la equazione delle geodetiche supera di una unità, l'ordine d'infinità del numero di congruenze isoterme di Liouville, di cui essa è dotata. I risultati sopra ottenuti possono quindi anche enunciarsi nel modo seguente:

1° Non esiste alcuna superficie che ammetta più di cinque integrali quadratici indipendenti per la equazione delle geodetiche. Questo

numero è raggiunto dalle superficie a curvatura totale costante e da queste superficie solamente.

2.° Non esiste alcuna superficie, che ammetta per la equazione delle geodetiche quattro e non più integrali quadratici indipendenti.

3.° Tra le superficie a curvatura totale variabile applicabili su quelle di rotazione ne esiste una classe, per cui la equazione delle geodetiche ammette tre integrali quadratici per la equazione delle geodetiche. Per tutte le altre superficie applicabili sopra superficie di rotazione l'equazione delle geodetiche ammette un solo integrale quadratico, quello, che si ottiene elevando al quadrato l'integrale lineare.

4.° Esistono superficie a curvatura totale variabile, per cui la equazione delle geodetiche ammette due integrali quadratici indipendenti; come ne esistono altre non applicabili sopra superficie di rotazione con un solo integrale quadratico per la detta equazione.

Parte Seconda

Teoria delle superficie considerate come dotate di forma rigida nello spazio.

Capitolo Primo

Equazioni generali della teoria delle superficie.

Equazioni fondamentali della teoria delle superficie. Equazioni intrinseche di una superficie considerata come dotata di forma rigida nello spazio. Curvatura normale, curvatura tangenziale e flessione delle linee tracciate sopra una superficie. — Teorema di Meunier. Binormale e normale principale. — Formole di Frenet. — Torsione. — Torsione geodetica.

116. Dalla introduzione (§29) risulta che una forma differenziale quadratica binaria positiva

$$\varphi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

può in infiniti modi riguardarsi come proveniente dalla forma

$$dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2$$

per la sostituzione alle $\underline{y}$ di opportune funzioni del-

le x; in altri termini che le equazioni

$$\sum_1^3{}_h\, y_{h|r}\, y_{h|s} = a_{rs} \qquad \mathcal{I}_1)$$

ammettono infinite soluzioni.

Invero in questo caso (§ 16) i simboli di Riemann si riducono ad uno solo, a cui si può sostituire l'invariante di Gauss relativo alla forma φ, che si assume come fondamentale, e le equazioni ($\mathcal{G}$) del § 29, posto

$$b = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2\,, \qquad 1)$$

si riducono alla unica equazione

$$\frac{b}{a} = \mathcal{G}. \qquad \mathcal{G})$$

Per trovare quindi tutte le soluzioni del sistema ($\mathcal{I}_1$) basterà trovare tutte le forme differenziali quadratiche binarie

$$\psi = \sum_1^2{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

il cui discriminante b assume il valore dato dalla ($\mathcal{G}$) e che di più sono tali che il primo sistema derivato da quello di elementi b_{rs} secondo la forma φ sia simmetrico cioè soddisfi alle

$$b_{rst} = b_{rts}\,, \qquad \mathcal{C})$$

che sono due distinte equazioni a derivate parziali di 1° ordine con due funzioni incognite, potendosi sempre eliminare una delle b_{rs} mediante la ($\mathcal{G}$).

Sappiamo di più che, determinata una for-

ma ψ la quale soddisfi alle equazioni (G) e (C), si hanno tutte le corrispondenti soluzioni del sistema (T_1) integrando il sistema completo, che comprende assieme alle (T_1) le equazioni di 2° ordine

$$y_{h|rs} = \gamma_h\, b_{rs} \qquad (T_2)$$
$$(h=1,2,3,\ r,s=1,2),$$

le γ_h essendo definite dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^3{}_h \gamma_h\, y_{h|r} = 0 \quad (r=1,2) \\ \sum_1^3{}_h \gamma_h^2 = 1; \end{array}\right\} \quad 2)$$

e che l'integrale generale di un tale sistema contiene tre costanti arbitrarie additive e tre non additive; queste ultime potendosi far coincidere con quelle, che definiscono una sostituzione ortogonale relativa alle variabili y_1, y_2, y_3.

Quanto abbiamo ora ricordato tradotto in linguaggio geometrico significa (§ 55) che ogni forma differenziale quadratica binaria positiva φ può riguardarsi come espressione del quadrato dell'elemento lineare di tutta una classe di superficie applicabili, ciascuna delle quali risulta determinata di forma, non però di posizione, nello spazio, da una seconda forma ψ, la quale soddisfi alle equazioni (G) e (C).

117. La determinazione di tutte le superficie di

mi stessa classe, cioè dotate dello stesso elemento lineare, costituisce il problema fondamentale della teoria delle superficie applicabili, del quale non possiamo per ora occuparci; e che esigerebbe la integrazione del sistema (C). - Supporremo invece data la seconda forma ψ, per cui siano soddisfatte le equazioni (C) e (G), e ci proporremo di studiare le proprietà della superficie determinata dalle due forme φ e ψ; le quali appunto perchè determinano la forma della superficie contengono tutto e soltanto ciò, che si richiede per lo studio di quelle proprietà, che le competono, prescindendo dalle relazioni, in cui si può porre con altri enti geometrici ad essa esterni, e perciò si dicono intrinseche.

Le equazioni (C) e (G), che valgono ed hanno grandissima importanza nella teoria generale delle superficie, si diranno equazioni fondamentali di questa teoria. Le equazioni (I_1) ed (I_2) saranno invece dette equazioni intrinseche della superficie da esse rappresentata, perchè esse provengono dalla eliminazione dalle equazioni in termini finiti della superficie stessa (§ 50 e 55) delle costanti che ne determinano la posizione nello spazio.

Dovremo ora occuparci della trasformazione

delle equazioni fondamentali e delle intrinseche.
Comminciamo dalle prime ed esprimiamo i coefficienti b_{rs} della forma ψ, che chiameremo seconda forma fondamentale, nel modo indicato nel § 44 per mezzo degli elementi di due sistemi λ_r e $\bar{\lambda}_r$ di invariante algebrico eguale all'unità e di tre invarianti α, μ, β; cioè facciamo le posizioni

$$b_{rs} = \alpha \lambda_r \lambda_s + \mu(\lambda_r \bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r \lambda_s) + \beta \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s \qquad 3)$$

Per queste la equazione (G) assumerà la forma

$$\alpha \beta - \mu^2 = G \qquad g)$$

Indicando poi con φ_r il sistema dedotto dal sistema λ_r, con γ e (γ) le curvature geodetiche rispettivamente delle congruenze λ_r e $\bar{\lambda}_r$, ricordando le formole

$$\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \varphi_s \,;\ \bar{\lambda}_{rs} = -\lambda_r \varphi_s \qquad 4)$$

$$\varphi_s = \gamma \lambda_s + (\gamma)\, \bar{\lambda}_s \qquad 5)$$

(Introduzione, Capitolo Sesto) e ponendo

$$\delta = \alpha - \beta \qquad 6)$$

per derivazione covariante secondo φ dalle (3) si deducono le

$$\left.\begin{aligned} b_{rst} = (\alpha_t - 2\mu\varphi_t)\lambda_r\lambda_s + (\beta_t + 2\mu\varphi_t)\bar{\lambda}_r\bar{\lambda}_s \\ + (\delta\varphi_t + \mu_t)(\lambda_r\bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r\lambda_s) \quad , \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

per le quali le (C) assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^2{}_p\, \alpha^{(p)}\bar{\lambda}_p = \sum_1^2{}_p\, \mu^{(p)}\lambda_p + 2\mu(\gamma) + \delta\gamma \\ \sum_1^2{}_p\, \beta^{(p)}\lambda_p = \sum_1^2{}_p\, \mu^{(p)}\bar{\lambda}_p - 2\mu\gamma + \delta(\gamma) \end{aligned}\right\} \quad c)$$

118. Quando una superficie si rappresenta mediante un sistema di equazioni

$$y_h = y_h(x_1 x_2)$$
$$(h = 1, 2, 3)$$

i coseni di direzione delle linee λ_r e $\bar{\lambda}_r$ rispetto agli assi y_1, y_2, y_3 sono dati (§ 62) rispettivamente dalle formole

$$\xi_h = \sum_{1}^{2}{}_r \lambda^{(r)} y_{h|r}, \quad \eta_h = \sum_{1}^{2}{}_r \bar{\lambda}^{(r)} y_{h|r}; \qquad 7)$$

dalle quali e dalle (2) si traggono le

$$\sum_{1}^{3}{}_h \xi_h \zeta_h = 0, \quad \sum_{1}^{3}{}_h \eta_h \zeta_h = 0.$$

Queste ci dicono che $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sono i coseni di direzione della normale alla superficie, normale, che assieme alle tangenti alle linee λ_r e $\bar{\lambda}_r$ costituisce una terna di assi ortogonali. Siccome le (2) lasciano indeterminato il segno delle ζ, noi lo determineremo ora in modo che il determinante

$$(\xi_1 \ \eta_2 \ \zeta_3)$$

risulti eguale all'unità in modo cioè che la terna ortogonale delle direzioni ξ_h, η_h, ζ_h sia congruente a quella degli assi y_1, y_2, y_3.

Osserviamo ancora che dalle equazioni $(\mathcal{J}_2)$, nelle quali alle b_{rs} si intendono sostituite le espressioni date dalle (3), si traggono le

$$\sum_1^2{}_s \lambda^{(s)} y_{h|rs} = \mathfrak{I}_h(\alpha\lambda_r + \mu\bar\lambda_r)$$
$$\sum_1^2{}_s \bar\lambda^{(s)} y_{h|rs} = \mathfrak{I}_h(\mu\lambda_r + \beta\bar\lambda_r)$$

Se ora deriviamo le (7) tenendo conto di queste formole e delle (5), troviamo le

$$\left.\begin{aligned} \xi_{h|r} &= \eta_h\varphi_r + \mathfrak{I}_h(\alpha\lambda_r + \mu\bar\lambda_r) \\ \eta_{h|r} &= -\xi_h\varphi_r + \mathfrak{I}_h(\mu\lambda_r + \beta\bar\lambda_r) \end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Se invece si derivano le (2) e si tien conto ancora delle $(\mathfrak{I}_2)$ si perviene, come si vide nel § 29, alle

$$\mathfrak{I}_{h|r} = -\sum_1^2{}_s b_{rs}\, y_h^{(s)},$$

ovvero, per le (3) e (7) alle

$$\mathfrak{I}_{h|r} = -\xi_h(\alpha\lambda_r + \mu\bar\lambda_r) - \eta_h(\mu\lambda_r + \beta\bar\lambda_r) \quad 8_1)$$

Alle equazioni (8) ed (8_1) aggiungiamo le

$$y_{h|r} = \xi_h\lambda_r + \eta_h\bar\lambda_r, \quad 7_1)$$

le quali equivalgono alle (7) e le

$$\xi_h\xi_k + \eta_h\eta_k + \mathfrak{I}_h\mathfrak{I}_k = \varepsilon_{hk} \quad 9)$$

le quali (indicandosi con ε_{hk} lo $\underline{0}$ o l'unità secondo che è $h \lessgtr k$ ovvero $h = k$), ci dicono che le direzioni ξ_h, η_h e $\mathfrak{I}_h$ costituiscono una terna ortogonale. Si potrebbe verificare direttamente che questo sistema è completo sempre che siano soddisfatte le equazioni (c) e (g). Per convincersi di ciò basta però osservare che un tale sistema deve essere sempre integrabile tutte le volte che lo è il sistema $(\mathfrak{I}_1\mathfrak{I}_2)$, che il suo sistema

integrale generale deve contenere tante costanti arbitrarie quante ne contiene questo; e che il sistema (C g) equivale al sistema (C G), il quale rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$ sia completo.

Il sistema $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$ può essere sostituito da quello che comprende le (8) (8_1) (7_1) e (9) che designeremo brevemente con $\underline{S}$, e la cui integrazione presenta, come ora vedremo, assai minori difficoltà.

Osserviamo perciò che le (7_1), (8), (8_1) e (9) ci dicono che ciascuno dei sistemi $\zeta_h\, \eta_h\, \zeta_h\, y_h$, deve soddisfare al sistema di equazioni differenziali di 1° ordine

$$\left.\begin{aligned} \zeta_r &= \eta\varphi_r + \zeta(\alpha\lambda_r + \mu\bar{\lambda}_r) \\ \eta_r &= -\zeta\varphi_r + \zeta(\mu\lambda_r + \beta\bar{\lambda}_r) \\ \zeta_r &= -\zeta(\alpha\lambda_r + \mu\bar{\lambda}_r) - \eta(\mu\lambda_r + \beta\bar{\lambda}_r) \\ \zeta^2 &+ \eta^2 + \zeta^2 = 1 \end{aligned}\right\} \; i)$$

$$y_r = \zeta\lambda_r + \eta\bar{\lambda}_r. \qquad i_1)$$

Potremo quindi determinare un sistema integrale particolare $(\zeta_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ del sistema (i) e poscia un sistema integrale particolare $(\zeta_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ del sistema che assieme alle (i) comprende la equazione

$$\zeta_1\zeta + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta = 0\,;$$

sistema che potrebbe ridursi ad una equazione differenziale totale a due variabili. In fine la

determinazione del sistema ξ_3, η_3, ζ_3 non richiederà che la risoluzione del sistema di equazioni algebriche

$$\xi_1 \xi_3 + \eta_1 \eta_3 + \zeta_1 \zeta_3 = 0$$
$$\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \zeta_2 \zeta_3 = 0$$
$$\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1 .$$

Dalle (i_1), in cui si faccia successivamente $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$; $\xi = \xi_2$, $\eta = \eta_2$; $\xi = \xi_3$, $\eta = \eta_3$ dedurremo infine con semplici quadrature y_1, y_2, y_3.

Non ci tratterremo più a lungo sulla integrazione del sistema (S), dacchè questo problema è di secondaria importanza per noi, che vogliamo studiare le proprietà delle superficie per mezzo delle loro equazioni differenziali da noi dette intrinseche, che sono ora sostituite dalle (i) ed (i_1). Ci basterà di osservare ancora come, ottenuto nel modo indicato un sistema integrale particolare pel sistema (S), se ne conosca anche l'integrale generale; e come la maggiore facilità di integrazione del sistema $(i\, i_1)$ in confronto del sistema $(\mathfrak{T}\mathfrak{T}_1)$ dipenda da ciò che, integrando prima le (i) e poi le (i_1), noi introduciamo prima le costanti d'integrazione, che fissano l'orientazione della superficie, poi quelle, che fissano la posizione di un qua-

lunque suo punto; mentre la integrazione del sistema $(\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1)$ importerebbe la simultanea introduzione delle une e delle altre. Osserviamo ancora come le (7_1) ed (8_1) equivalgano alle

$$d\,y_h = \zeta_h \sum_{1r}^{2} \lambda_r\, dx_r + \eta_h \sum_{1r}^{2} \bar{\lambda}_r\, dx_r$$

$$-d\,\mathfrak{J}_h = (\alpha\zeta_h + \mu\eta_h)\sum_{1s}^{2} \lambda_s\, dx_s + (\mu\zeta_h + \beta\eta_h)\sum_{1s}^{2} \bar{\lambda}_s\, dx_s,$$

dalle quali e dalle (3) si ricava la identità

$$\sum_{1rs}^{2} b_{rs}\, dx_r\, dx_s = -\sum_{1h}^{3} d\,y_h\, d\,\mathfrak{J}_h\,, \qquad 10)$$

che ci dà una espressione assai semplice per la seconda forma fondamentale

119. Si indichi con ψ l'angolo, che la tangente alla linea λ_r in un punto qualunque $\mathfrak{P}$ della superficie fa con uno qualunque degli assi y_1, y_2, y_3, che indicheremo ora con y. Sarà

$$\zeta = \cos\psi, \qquad \zeta_r = -\operatorname{sen}\psi.\,\psi_r$$

e la prima delle (i) assumerà la forma

$$-\operatorname{sen}\psi.\,\psi_r = \mathfrak{J}(\alpha\lambda_r + \mu\bar{\lambda}_r) + \eta\varphi_r\,;$$

da cui moltiplicando per $\lambda^{(r)}$, sommando e indicando con ds l'elemento della linea λ_r si ricava (§ 66)

$$-\operatorname{sen}\psi\frac{d\psi}{ds} = \mathfrak{J}\alpha + \eta\gamma\,. \qquad 11)$$

Supponendo che l'asse $\underline{y}$ coincida colla direzione della normale positiva $\underline{n}$ alla superficie nel

punto P, è

$$\operatorname{sen}\psi = \zeta = 1,\ \eta = 0$$

e la formale precedente ci dà

$$\alpha = -\frac{d\psi}{ds}.$$

Vediamo così che:

„L'invariante $\underline{\alpha}$ cambiato di segno rappresen-
„tà la flessione della sezione normale alla superfi-
„cie, il cui piano passa per la tangente alla linea
„λ_r; assumendo la flessione stessa come positiva
„o come negativa secondo che la direzione, che va
„dal centro di curvatura della sezione al piede del-
„la normale coincide con quella della normale
„positiva o colla opposta."

Analogo significato ha naturalmente l'in-
variante $\underline{\beta}$ per la sezione normale, il cui piano
passa per la tangente alla linea $\overline{\lambda}_r$.

Se ora assumiamo l'asse $\underline{y}$ coincidente colla
tangente alla linea $\overline{\lambda}_r$ dalla (11) risulta $\eta = \operatorname{sen}\psi = 1$
e quindi

$$\gamma = -\frac{d\psi}{ds}$$

e si riconosce così che

„L'invariante $\underline{\gamma}$ cambiato di segno rappre-
„senta la flessione della proiezione della linea λ_r
„sul piano tangente alla superficie nel punto P,
„sempre che si assuma tale flessione come posi-

„tiva o come negativa, secondo che la direzione,
„che va dal centro di curvatura della proiezione
„verso il punto P coincide colla direzione positiva
„della tangente alla linea λ_r in P o colla opposta."

Per queste ragioni gl'invarianti $\underline{\alpha}$ e $\underline{\gamma}$ cambiati di segno assumono rispettivamente il nome di curvatura normale e di curvatura tangenziale della linea λ_r nel punto P. Risulta pure da quanto abbiamo ora dimostrato che la curvatura geodetica coincide in valore assoluto colla curvatura tangenziale e che questa resta invariata, quando la superficie si deforma senza alterazione del suo elemento lineare.

Il nuovo significato geometrico ora stabilito per l'invariante $\underline{\gamma}$ è assunto in alcuni trattati come definizione della curvatura geodetica; definendosi allora le linee geodetiche come quelle linee, la cui curvatura tangenziale è nulla.

120. Torniamo alle equazioni (i), moltiplichiamo ciascuno dei tre sistemi, di cui esse risultano per $\lambda^{(r)}$, e sommiamo rispetto ad r. Otteniamo così le

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \alpha\zeta + \gamma\eta \\ \frac{d\eta}{ds} &= \mu\zeta - \gamma\xi \\ \frac{d\zeta}{ds} &= -\alpha\xi - \mu\eta \end{aligned}\right\} \quad 12),$$

in cui potremo porre

$$\xi = \xi_h \,, \; \eta = \eta_h \,, \; \zeta = \zeta_h \,.$$

Facendo tale sostituzione nella prima, elevandola al quadrato e sommando rispetto ad h perveniamo alla

$$c^2 = \alpha^2 + \gamma^2 \qquad A)$$

nella quale c rappresenta la flessione o prima curvatura della linea λ_r. Si ha così che

„ Il quadrato della flessione di una linea „ tracciata sopra una superficie è uguale alla somma dei quadrati della curvatura normale e „ della tangenziale della linea stessa."

Dalle (3) ricaviamo ancora

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} a^{(rs)} b_{rs} = \alpha + \beta \,,$$

ed il primo membro di questa identità essendo indipendente dalla copia di sistemi ortogonali $(\lambda_r \bar{\lambda}_r)$, si ha che

„ La somma delle curvature di due sezioni „ normali, i cui piani sono fra loro ortogonali, „ è costante in ogni punto ed è rappresentata „ dall'invariante $\sum_{1}^{2}{}_{rs} a^{(rs)} b_{rs}$ cambiato di segno."

La metà di questa somma si dice curvatura media della superficie nel punto considerato.

121. Si chiama binormale ad una linea in un de

terminato punto P la retta, che e' normale insie-
me alla tangente nel punto P ed alla tangente nel
punto vicinissimo P'. Per la linea λ_r indicando
con B_1, B_2, B_3 i coseni di direzione della nor-
male principale, questi dovranno soddisfare
alle equazioni:

$$\sum_1^3{}_h \; B_h \, \xi_h = 0$$

$$\sum_1^3{}_h \; B_h \frac{d\xi_h}{ds} = 0$$

Siccome le (12) ci danno le

$$\frac{d\xi_h}{ds} = \gamma\,\eta_h + \alpha\,\zeta_h\,, \qquad 13)$$

così dalle precedenti, ricordando anche la (A) e
le relazioni, che legano gli elementi del deter-
minante $(\xi_1 \eta_2 \zeta_3)$ coi rispettivi complementi alge-
brici, e stabilendo opportunamente la direzione
positiva della binormale si deducono per le B_h
le espressioni

$$c\,B_h = \gamma\,\zeta_h - \alpha\,\eta_h\,. \qquad 14)$$

Se poniamo

$$c = \frac{1}{r}\,, \quad \alpha = -\frac{1}{\rho}\,,$$

se cioe' indichiamo rispettivamente con r e ρ il
raggio di una curvatura della linea λ_r e quel-
lo della sezione normale ad essa tangente le (14)
assumono la forma

$$\rho \mathcal{B}_h = r \rho \gamma \mathcal{S}_h + r \eta_h . \qquad 15)$$

Se poi facciamo coincidere l'asse y_h colla tangente alla linea $\overline{\lambda}_r$, la precedente si riduce alla

$$r = \rho \cos \psi ,$$

indicando con ψ l'angolo, che il piano osculatore della linea λ_r fa col piano normale alla superficie e che contiene la tangente alla linea stessa. Si ha così il celebre teorema di Meunier.

„Il raggio di curvatura in un punto qualunque di una curva tracciata sopra una superficie è eguale a quello della sezione normale, il cui piano contiene la tangente alla curva, moltiplicato pel coseno dell'angolo, che questo piano fa col piano osculatore della curva stessa."

La importanza di questo teorema dipende da ciò che per esso lo studio delle linee comunque tracciate sopra una superficie, per quanto riguarda le loro curvature in un determinato punto, si fa dipendere da quello delle curvature delle sezioni fatte nella superficie con piani passanti per la sua normale in quel punto.

122. Si chiama normale principale ad una linea in un determinato punto quella normale che giace nel piano osculatore della linea in quel punto; in altri termini quella retta, che è in-

zione normale alla tangente ed alla binormale. Se indichiamo con ν_1, ν_2, ν_3 i coseni di direzione della normale principale alla linea λ_r, essi dovranno soddisfare alle equazioni

$$\sum_1^3{}_h \xi_h \nu_h = 0$$

$$\sum_1^3{}_h \beta_h \nu_h = 0,$$

dalle quali e dalle (13) si ricavano per le ν_h le espressioni

$$c\,\nu_h = \gamma\,\eta_h + \alpha\,\zeta_h\,; \qquad 16)$$

quando la direzione positiva della binormale si scelga in modo che il triedro della tangente, della normale principale e della binormale, che si dice triedro principale, riesca congruente a quello degli assi y_1, y_2, y_3. Dalla (16) per $\gamma = 0$ scendono le $\nu_h = \pm\zeta_h$, le quali ci dicono che

„Le linee geodetiche sono quelle dotate della „proprietà che il piano osculatore passa per la nor„male alla superficie."

Anche questa proprietà si assume talora come definizione per le geodetiche.

123. Il confronto delle (16) colle (13) ci dà le

$$c\,\nu_h = \frac{d\xi_h}{ds} \qquad 17)$$

Poniamo ora

$$c \operatorname{sen} \vartheta = \gamma\,,\quad c \cos \vartheta = \alpha \qquad 18)$$

e le (14) e (16) assumeranno la forma

$$\beta_h = \text{sen}\,\vartheta\,\zeta_h - \cos\vartheta\,\eta_h$$
$$\nu_h = \text{sen}\,\vartheta\,\eta_h + \cos\vartheta\,\zeta_h\,.$$

Se da queste si calcolano le derivate delle β_h e ν_h rispetto all'arco $\underline{s}$ delle linee λ_r, avendo presenti le (12) e le (18) e ponendo

$$\tau = \frac{d\vartheta}{ds} - \mu\,, \qquad 19)$$

si ottengono le

$$\frac{d\beta_h}{ds} = \tau\ \nu_h \qquad 17_1)$$
$$\frac{d\nu_h}{ds} = -c\,\zeta_h - \tau\ \beta_h\,. \qquad 17_2)$$

Si chiama seconda curvatura, o torsione di una linea in un punto P l'angolo, che fanno fra di loro le due binormali alla curva in quel punto e nel punto vicinissimo P' diviso per la distanza PP'. — Dalla (17₁) risulta quindi che $\underline{\tau}$ non è che la torsione della linea λ_r nel punto P. — Le (17) (17₁) e (17₂) sono dovute a Frenet, ma sono note anche sotto il nome di formole di Serret.

Consideriamo in vece della linea λ_r la geodetica ad essa tangente nel punto P. Per questa si ha $\gamma \equiv 0$ e quindi $\vartheta \equiv 0$, $\frac{d\vartheta}{ds} = 0$; mentre l'invariante $\underline{\mu}$ ha lo stesso valore che per la linea λ_r. Siccome poi la (19) ci dà in questo caso

$$\mu = -\tau\,,$$

possiamo concludere che

„ L'invariante $\underline{\mu}$ cambiato di segno rappresen-

„ ta la torsione della geodetica tangente alla li-
„ nea $\overline{\lambda}_r$."

Questa torsione si suole chiamare torsione geo-
detica della linea λ_r; però, pure accettando tale
denominazione, conviene guardarsi dall'equi-
voco, in cui essa può condurre per l'analoga de-
nominazione attribuita alla curvatura tangen-
ziale, la quale non è altrimenti da confondere col-
la curvatura della geodetica tangente alla linea
considerata.

Se ricordiamo (§ 40) che il sistema canonico
ortogonale a quello di elementi $\overline{\lambda}_r$ risulta degli
elementi $-\lambda_r$, dalle (3) deduciamo immediata-
mente che

„ Le linee di due congruenze ortogonali han-
„ no in uno stesso punto della superficie torsioni
„ geodetiche eguali in valore assoluto ed opposte
„ di segni."

Capitolo Secondo

Delle linee di curvatura e delle linee asintotiche.

Equazioni e definizioni delle linee di curvatura — Curvatu-
re principali — Indicatrice di Dupin — Teorema di Gauss e for-
mole di Codazzi — Equazioni intrinseche delle superficie ri-

„ferite alle linee di curvatura in generale, e delle
„superficie sviluppabili in particolare. Proprietà
„caratteristica dei cilindri retti a base circolare e
„delle superficie sferiche. Congruenze e direzio-
„ni coniugate. Congruenze asintotiche, loro de-
„finizioni ed equazioni. Equazioni intrinseche
„delle superficie riferite ad una congruenza a-
„sintotica ed a quella ad essa ortogonale. – Teo-
„rema di Enneper – Formole di Raffy. – Curva-
„tura cilindrica per le linee tracciate sulle super-
„ficie sviluppabili e curvatura sferica per le linee
„tracciate sulle superficie non sviluppabili – Rappresentazione sferica.

124. Sopra una superficie si chiamano linee di cur-
vatura quelle, le quali sono dotate della proprie-
tà che le normali alla superficie in due punti vi-
cinissimi di una tale linea si incontrano. –
Le equazioni della superficie siano ancora le
$y_h = y_h(x_1\ x_2)$ e si indichino con Y_1, Y_2, Y_3 le coor-
dinate correnti della normale alla superficie
in un suo punto qualunque P di coordinate
$(y_1\ y_2\ y_3)$, con ρ la distanza di un punto qualun-
que Q di questa normale da P, considerata co-
me positiva o come negativa secondo che la di-
rezione QP coincide colla direzione positiva del-
la normale o colla opposta. Le due equazioni

potremo mettere sotto la forma

$$Y_h - y_h + \rho\, \mathcal{J}_h = 0$$

ed analogamente quelle della normale in un punto P' vicinissimo a P e di coordinate

$$y_1 + dy_1,\ y_2 + dy_2,\ y_3 + dy_3$$

sotto la forma

$$Y_h - y_h - dy_h + \rho\, \mathcal{J}_h + \rho\, d\mathcal{J}_h + \mathcal{J}_h\, d\rho = 0$$

Perchè le due normali abbiano un punto comune dovranno dunque essere soddisfatte le equazioni

$$dy_h = \rho\, d\mathcal{J}_h + \mathcal{J}_h\, d\rho\ .$$

Poichè dalle (2) del § 116 si traggono le

$$\sum_1^3{}_h\, \mathcal{J}_h\, dy_h = 0,\quad \sum_1^3{}_h\, \mathcal{J}_h\, d\mathcal{J}_h = 0\ ,$$

le precedenti moltiplicate per $\mathcal{J}_h$ e sommate d[illegible]la

$$d\rho = 0, \qquad 1)$$

per la quale, posto

$$\omega = \frac{1}{\rho}\ , \qquad 2)$$

assumono la forma

$$d\mathcal{J}_h = \omega\, dy_h \qquad 3)$$

Mentre dalla (1) ricaviamo che sono eguali le distanze dei due punti P e P' dal punto $\underline{C}$, in cui si incontrano le normali alla superficie in quei punti, e che si dice centro di curvatura della superficie nel punto P, le (3), che per essa si

riducono a due sole distinte, sono le equazioni delle linee di curvatura della superficie.

Se ora indichiamo al solito con df la variazione, che una funzione qualunque f subisce per uno spostamento piccolissimo positivo lungo la linea λ_r, dalle (i) ed (i) del § 118 ricaviamo le

$$dy = \zeta\, ds,\quad d\zeta = -(\alpha\zeta + \mu\eta)\, ds,$$

nelle quali possiamo porre y_h, ζ_h, η_h e ζ_h rispettivamente al posto di y, ζ, η, ζ. Confrontando quindi queste colle (3) ne ricaviamo le

$$\mu = 0,\quad \omega = -\alpha.$$

Ricordando il significato di μ e quanto fu detto nel § 44 sulla riduzione di un sistema doppio simmetrico alla forma canonica possiamo dalle equazioni precedenti concludere

"1° Che le linee di curvatura di una superficie „ possono anche definirsi come linee di torsio„ne geodetica nulla.

"2° Che una congruenza di linee risulta o non „ risulta di linee di curvatura assieme a quel„la delle sue traiettorie ortogonali.

"3° Che se quante volte il sistema di elemen„ti b_{rs} sia ridotto alla forma canonica

$$b_{rs} = \alpha\lambda_r\lambda_s + \beta\bar{\lambda}_r\bar{\lambda}_s,$$

„ le linee λ_r e quindi anche le $\bar{\lambda}_r$ sono linee di cur-
„ vatura della superficie, che ha per equazioni
„ intrinseche le ($\mathcal{I}_1$) ed ($\mathcal{I}_2$) del § 116, e che gli in-
„ varianti $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ cambiati di segno sono le cur-
„ vature normali rispettive delle linee stesse.»

„4.° In altri termini una congruenza di li-
„ nee di curvatura è caratterizzata dalla pro-
„ prietà che, assunte come coordinate y_1, y_2 un
„ suo parametro ed un parametro della congruen-
„ za ad essa ortogonale, la prima e la seconda
„ forma fondamentale si riducono insieme a
„ contenere soltanto i quadrati dei differen-
„ ziali delle variabili indipendenti y e le espres-
„ sioni della prima e della seconda forma fon-
„ damentale in coordinate y_1 ed y_2 sono rispet-
„ tivamente

$$\varphi = \rho_1^2\, dy_1^2 + \rho_2^2\, dy_2^2$$
$$\Psi = \alpha\, \rho_1^2\, dy_1^2 + \beta \rho_2^2\, dy_2^2,$$

„ $-\alpha$ e $-\beta$ sono le curvature normali rispettivamen-
„ te delle linee y_1 ed y_2.»

5.° Se è $\alpha = \beta$, cioè se è

$$\Psi \equiv \alpha\, \varphi$$

„ ogni linea è linea di curvatura per la super-
„ ficie. — In ogni altro caso esistono sopra di
„ questa due e due sole congruenze ortogona-

„si di linee di curvatura, la cui determinazio-
„ne si ottiene nel modo indicato nel § 44.“

125. Se λ_r e $\overline{\lambda}_r$ sono due congruenze ortogo-
nali di linee di curvatura, ω_1 ed ω_2 le loro ri-
spettive curvature normali cambiate di segno,
per quanto abbiamo visto nei paragrafi pre-
cedenti, gli elementi b_{rs} ammetteranno le e-
spressioni

$$b_{rs} = \omega_1 \lambda_r \lambda_s + \omega_2 \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s . \qquad 4)$$

Se ora si considera una congruenza qualun-
que λ'_r e si indica con $-\alpha$ la curvatura norma-
le delle linee λ'_r, con ϑ l'angolo, che esse fanno
con quelle della congruenza λ_r, se cioè poniamo

$$\alpha = \sum_{1}^{2}{}_{rs} \lambda'^{(r)} \lambda'^{(s)} b_{rs}$$

$$\cos\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{r} \lambda'^{(r)} \lambda_r, \ \operatorname{sen}\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{r} \lambda'^{(r)} \overline{\lambda}_r ,$$

dalla (4) si trae la formola

$$\alpha = \omega_1 \cos^2\vartheta + \omega_2 \operatorname{sen}^2\vartheta, \qquad 5)$$

che è dovuta ad Eulero.

Se è $\omega_1 = \omega_2$ la (5) ci dà $\alpha = \omega_1$ e si dice che tut-
te le linee tracciate sulla superficie hanno la stes-
sa curvatura normale. In generale dalla (5)
si ricava

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} = (\omega_1 - \omega_2) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta,$$

e ne segue che i valori massimo e minimo di α

corrispondono a $\vartheta = 0$ ed a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; cioè coincidono con ω_1 ed ω_2. Per questa ragione ω_1 e ω_2 prendono il nome di curvature principali e le sezioni normali condotte per le tangenti alle linee di curvatura quello di sezioni principali. Per questa stessa ragione le linee di curvatura possono anche definirsi come quelle, che sono dotate della proprietà che in ogni punto la loro curvatura normale è massima o minima rispetto a quelle di ogni altra linea che non sia ad esse tangente. Il prodotto delle due curvature principali di una superficie in un suo punto qualunque P si dice curvatura totale della superficie in quel punto.

126. Siano ω_1 ed ω_2 dello stesso segno, che potrà anche supporsi negativo, e nel piano tangente alla superficie in un punto qualunque P si assumano due assi ortogonali x ed y coincidenti rispettivamente colle tangenti alle linee di curvatura λ_r e $\overline{\lambda}_r$. La ellissi di equazione

$$\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 + 1 = 0 \qquad D)$$

è tale che, se si indica con ρ il semidiametro inclinato dell'angolo ϑ sull'asse delle x, si ha

$$\omega_1 \cos^2\vartheta + \omega_2 \operatorname{sen}^2\vartheta = -\frac{1}{\rho^2}.$$

Se confrontiamo questa colla (5) ed indichiamo con

$\underline{\mathfrak{R}}$ il raggio di curvatura della sezione normale, il cui piano è tangente alla linea λ'_r, ritroviamo

$$\rho^2 = \mathfrak{R} .$$

Dunque

„ La curvatura normale di una linea trac„ ciata comunque sopra una superficie in un suo „ punto qualunque è eguale all'inversa del quadra„ to del semidiametro della ellissi $(\mathfrak{D})$ relativa a quel „ punto, la cui direzione coincide colla tangente „ alla linea ."

Se è $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, la ellissi $(\mathfrak{D})$ è una circonferenza di raggio $\frac{1}{\sqrt{-\omega}}$ e, come abbiamo già visto, ogni linea tracciata sulla superficie ha nel punto considerato la curvatura normale eguale ad $\frac{1}{\sqrt{-\omega}}$. — Si dice allora che il punto $\mathfrak{P}$ è un ombelico od un punto circolare.

Se ω_1 ed ω_2 sono di segni opposti, consideriamo le due iperboli coniugate

$$\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2 = \pm 1 . \qquad \mathfrak{D}_1)$$

Indicando anche in questo caso con $\underline{\rho}$ il semidiametro inclinato dell'angolo ϑ sull'asse delle $\underline{x}$, dalla $(\mathfrak{D}_1)$ ricaviamo la

$$\omega_1 \cos^2\vartheta + \omega_2 \operatorname{sen}^2\vartheta = \pm \frac{1}{\rho^2} , \qquad 6)$$

e dal confronto di questa colla (5)

$$\rho^2 = \pm \frac{1}{\alpha} , \qquad 7)$$

valendo il segno superiore o l'inferiore, secondo che Δ è positivo o negativo.

Dunque nel caso, che ora consideriamo, le due iperboli coniugate $(\mathcal{D}_1)$ servono, come nel caso precedente la ellissi $(\mathcal{D})$, a rappresentare graficamente le curvature normali di tutte le linee, che possono tracciarsi sulla superficie intorno al punto $\mathcal{P}$ considerato. È da notare però che, mentre nel primo caso le sezioni normali volgono tutte la concavità da una stessa parte della normale alla superficie, perchè $-\Delta$ è sempre positivo; ciò non avviene più nel secondo caso. Ciò vuol dire che, quando ω_1 ed ω_2 hanno lo stesso segno, la superficie si trova tutta dalla stessa parte rispetto al piano tangente; mentre essa attraversa questo piano, se ω_1 ed ω_2 sono di segni opposti. Il passaggio poi attraverso il piano stesso ha luogo lungo la linea $\Delta = 0$, cioè come risulta dalle (6) e (7), corrispondentemente alle direzioni, per le quali si ha

$$\tan\vartheta = \pm\sqrt{-\frac{\omega_1}{\omega_2}}\ ,$$

che sono quelle degli asintoti delle iperboli $(\mathcal{D}_1)$. Queste direzioni dividono quindi la superficie nell'intorno del punto considerato in quattro settori, che si trovano alternativamente

dall'una e dall'altra parte del piano tangente.

Aggiungiamo che la ellissi $(\mathcal{D})$, o le iperboli $(\mathcal{D}_1)$ secondo i casi, prendono il nome di indicatrice di Dupin.

127. Vediamo quale forma assumono le equazioni fondamentali (g) e (c) e le intrinseche (i) ed (i_1) del Capitolo Primo, quando si supponga che le linee λ_r, e quindi anche le $\bar{\lambda}_r$, siano linee di curvatura. Designando ancora con ω_1 ed ω_2 le rispettive curvature principali cambiate di segno e ponendo

$$\delta = \omega_1 - \omega_2$$

le equazioni fondamentali diventano

$$\omega_1 \, \omega_2 = G \qquad g_1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^2{}_p \, \omega_2^{(p)} \lambda_p &= \delta(\gamma) \\ \sum_1^2{}_p \, \omega_1^{(p)} \bar{\lambda}_p &= \delta \gamma \, . \end{aligned}\right\} c_1$$

La (g_1) ci dà un importantissimo significato geometrico dell'invariante di Gauss relativo alla prima forma fondamentale. In essa di più si legge il seguente teorema dovuto a Gauss

„ La curvatura totale di una superficie rimane inalterata per tutte le deformazioni, che non „ alterano l'elemento lineare della superficie stessa„

Le formole (c_1) sono dovute al Mainardi, ma passano generalmente sotto il nome di formole

di Codazzi.

Le equazioni intrinseche (i) (§ 118) assumono poi la forma

$$\left.\begin{aligned}\xi_r &= \eta\varphi_r - \omega_1\zeta\lambda_r\\ \eta_r &= -\xi\varphi_r - \omega_2\zeta\lambda_r\\ \zeta_r &= -\omega_1\xi\lambda_r - \omega_2\eta\bar{\lambda}_r,\end{aligned}\right\} \quad i_1)$$

mentre le (i') non ottengono alcuna semplificazione e si presentano ancora sotto la forma

$$y_r = \xi\lambda_r + \eta\bar{\lambda}_r \qquad i')$$

128. Se nelle (c_1) supponiamo $\delta = 0$ cioè

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad ,$$

ne ricaviamo subito che $\underline{\omega}$ deve essere costante. Se è $\omega = 0$, le (i_1) ci dicono che le ζ_h sono costanti e che quindi la superficie è un piano. Ricordando le (4) vediamo così che

„ La superficie piana è caratterizzata dall'an„nullarsi identicamente della seconda forma fon„damentale."

Se è $\underline{\omega}$ diverso da $\underline{0}$, poniamo

$$\omega = -\frac{1}{R}$$

e le ultime delle (i_1) confrontate colle (i') ci daranno

$$y_r = R\zeta_r\,,$$

cioè, indicando con c_1, c_2, c_3 delle costanti e ricordando che le formole precedenti debbono essere soddisfatte da $y = y_1, y_2, y_3$ e $z = z_1, z_2, z_3$

$$y_h - c_h = R\,\Im_h$$
$$(h = 1, 2, 3)\ .$$

Queste quadrate e sommate dànno

$$\sum_1^3{}_h\,(y_h - c_h)^2 = R^2,$$

e ci dicono che la superficie, di cui si tratta, è una sfera di raggio $\frac{1}{\omega}$.

Ricordando alcuni risultati dei § 123 e 125 e considerando il piano come una superficie sferica di raggio infinito possiamo dunque considerare che

"Le superficie sferiche sono le sole superficie, i „cui punti siano tutti punti circolari; cioè, in altri „termini, sono le sole superficie dotate della pro„prietà che ogni loro linea può riguardarsi come „linea di curvatura."

129. Dalle formole generali del paragrafo precedente ricaviamo quelle, che valgono per le superficie sviluppabili; cioè per le superficie, per le quali è $G = 0$. In questo caso perchè la (g_1) sia soddisfatta dovrà annullarsi una delle due curvature principali. Poniamo

$$\omega_2 = 0,\ \omega_1 = \omega$$

supponendo $\omega \gtrless 0$, poichè il caso di $\omega = 0$ è già stato considerato.

Mentre la (g_1) si cambierà in una identità, le (c_1) assumeranno la forma

$$\sum_{1}^{2}{}_p \, \omega^{(p)} \bar{\lambda}_p = \omega \, \gamma \, , (\gamma) = 0 \qquad i_1)$$

Avremo dunque le

$$\varphi_r = \gamma \, \lambda_r$$

e, al posto delle (i_1) le

$$\begin{aligned} \xi_r &= (\eta \gamma - \omega \zeta) \lambda_r \\ \eta_r &= - \xi \, \gamma \, \lambda_r \qquad j) \\ \zeta_r &= - \xi \, \omega \, \lambda_r \, . \end{aligned}$$

In particolare supponiamo $\underline{\omega}$ costante. Le (c_1') ci dicono che è $\gamma = (\gamma) = 0$. Si tratta dunque di una superficie applicabile sul piano, in cui le linee di curvatura di un sistema sono rette perchè hanno eguale a $\underline{0}$ tanto la curvatura normale che la tangenziale; e le altre sono circonferenze, perchè hanno costante la curvatura normale e nulla la tangenziale. Da queste semplici considerazioni geometriche risulta quindi che la superficie è un cilindro retto, la cui base è una circonferenza di raggio eguale ad $\frac{1}{\omega}$.

Però è facile dimostrare la stessa cosa analiticamente. Per ciò si osservi che in questo caso le (3) ci dicono che le $\underline{\eta}$ sono costanti. Con un semplice cambiamento di assi si può quindi assumere $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 = 1$. Posto

$$R = - \frac{1}{\omega} \, ,$$

dal confronto delle (j) colle (i) si traggono le

$$y_{h|r} = \mathcal{R}\, \mathfrak{I}_{h|r}$$
$$(h = 1, 2;\ r = 1, 2);$$

e quindi, indicando con c_1 e c_2 delle costanti arbitrarie,

$$y_h - c_h = \mathcal{R}\, \mathfrak{I}_h \cdot (h = 1, 2)$$

E, poichè la

$$\eta_1 \mathfrak{I}_1 + \eta_2 \mathfrak{I}_2 + \eta_3 \mathfrak{I}_3 = 0$$

ci dà in questo caso $\mathfrak{I}_3 = 0$, se ne trae

$$(y_1 - c_1)^2 + (y_2 - c_2)^2 = \mathcal{R}^2.$$

130. Purchè ω_1 ed ω_2 non si annullino insieme, cioè purchè non si tratti di una superficie piana, potremo porre

$$\rho = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad 8)$$

La equazione (g_1) è allora soddisfatta identicamente per

$$\omega_1 = \sqrt{G \cdot \rho}\,,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad 9)$$

Posto poi

$$2\eta = \log G,\ 2\nu = \log \rho, \qquad 10)$$

le equazioni (c_1) assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{2}{}_p \rho^{(p)} \lambda_p &= \sum_{1}^{2}{}_p \eta^{(p)} \lambda_p + (1-\rho)(\gamma) \\ \sum_{1}^{2}{}_p \rho^{(p)} \bar{\lambda}_p &= -\sum_{1}^{2}{}_p \eta^{(p)} \bar{\lambda}_p + \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\gamma \end{aligned}\right\} \quad \mathcal{C}_1)$$

Queste equazioni che, a differenza delle (c_1), contengono la sola incognita ρ al posto delle ω_1 ed ω_2 e valgono per tutte le superficie curve ci saranno utili in seguito.

131. Sopra una superficie qualunque $\underline{S}$ determinata per mezzo delle sue equazioni intrinseche $(\mathfrak{I}_1)$ ed $(\mathfrak{I}_2)$ (§ 116), si consideri una congruenza qualunque λ_r e se ne determini un'altra λ'_r tale che la tangente a questa in un punto qualunque P coincida colla intersezione dei piani tangenti alla superficie $\underline{S}$ in P e nel punto P', cui si giunge per uno spostamento infinitesimo nella direzione positiva della linea λ_r. — Mantenendo per le linee λ_r le notazioni, di cui abbiamo fatto uso finqui, indichiamo con ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 i coseni di direzione delle linee λ'_r. Questi coseni, per la definizione da noi data della direzione corrispondente, saranno definiti, a meno del segno dalle equazioni

$$\sum_1^2{}_h \xi'_h \cdot \mathfrak{I}_{,h} = 0$$

$$\sum_1^2{}_h \xi'_h \cdot d\,\mathfrak{I}_h = 0$$

Per le (11) del § 120, indicando con ϑ l'angolo che le linee λ'_r fanno colle λ_r la seconda di quelle equazioni assume la forma

$$\alpha \cos\vartheta + \mu \operatorname{sen}\vartheta = 0 \qquad \alpha)$$

o anche, ricordando le (3) del § 117,

$$\sum_1^2{}_{rs} b_{rs}\, \lambda^{(r)} \lambda'^{(s)} = 0 \qquad \alpha_1)$$

La relazione, che lega le due congruenze λ_r e λ'_r

è simmetrica rispetto ad esse, dal che segue che la prima è dotata rispetto alla seconda della stessa proprietà, di cui questa è dotata rispetto a quella.

„ Sopra una superficie qualunque S si dicono „ coniugate due congruenze λ_r e λ'_r tali che in ogni „ punto P della superficie la tangente alla linea „ dell'una coincide colla intersezione dei piani „ tangenti alla superficie nel punto P e nel punto, „ cui si perviene per uno spostamento infinitesi„ mo nella direzione positiva della linea dell'al„ tra congruenza."

„ Sul piano tangente alla superficie in un pun„ to qualunque due direzioni si dicono coniugate, „ se coincidono colle tangenti in quel punto alle „ linee di due congruenze coniugate."

Se con $-\alpha'$ si indica la curvatura normale delle linee λ'_r, se cioè si pone

$$\alpha' = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, \lambda'^{(r)} \lambda'^{(s)}$$

dalle (3) del § 117 ricaviamo

$$\alpha' = \alpha \cos^2\vartheta + 2\mu \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \beta \operatorname{sen}^2\vartheta,$$

od anche, ricordando la (α)

$$\alpha' = \beta \operatorname{sen}^2\vartheta - \alpha \cos^2\vartheta,$$

e quindi indicando con H la somma delle curvature principali della superficie, cioè (§ 120) ponendo

$$-H = \alpha + \beta$$

e ricordando ancora la (g) del § 117

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \alpha' = -H \operatorname{sen}^2 \vartheta \\ \alpha \alpha' = G \operatorname{sen}^2 \vartheta . \end{array}\right\} \quad 11)$$

Dunque le curvature normali di due congruenze coniugate, le cui linee si incontrano sotto l'angolo ϑ, sono radici della equazione

$$\alpha^2 + (H \alpha + G) \operatorname{sen}^2 \vartheta = 0$$

Le linee di curvatura per le (4) sono definite dalla equazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{rs} b_{rs} \lambda^{(r)} \bar{\lambda}^{(s)} = 0 .$$

Dunque possiamo asserire che

„ Le congruenze di linee di curvatura sono „ definite dalla proprietà di essere coniugate colle congruenze ad esse ortogonali".

Da ciò poi e da quanto si è visto sopra segue che

„ Le congruenze coniugate sono tutte ortogo„nali fra di loro sul piano e sulle superficie sfe„riche. Per ogni altra superficie esiste una sola „ coppia di congruenze coniugate ortogonali fra „ di loro; quella costituita dalle linee di curvatura„

Indichiamo ora con μ_r e con μ'_r due congruenze coniugate qualunque, con ϑ e ϑ' gli angoli, che le loro linee fanno colle linee di curvatura λ_r. Per le (4) la (d_1) assumerà la forma

$$\tang \vartheta . \tang \vartheta' = - \frac{\omega_1}{\omega_2} \qquad \alpha_2)$$

Questa ci dice che le due direzioni ϑ e ϑ' coincidono con quelle di una copia di diametri coniugati della indicatrice di Dupin (§124). — Così troviamo per le direzioni coniugate la seguente definizione di cui spesso si fa uso, e che è quella data dal Dupin

" Intorno ad un punto P di una superficie due „ direzioni si dicono coniugate se coincidono con „ due diametri coniugati della indicatrice di Du„ pin relativa a quel punto."

132. Una congruenza si dice asintotica se è coniugata a sè stessa; e si dicono asintotiche le linee, che costituiscono una congruenza asintotica. — Da questa definizione e dalla (α) risulta prima di tutto che la condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza sia asintotica è data dall'annullarsi dell'invariante α; o, altrimenti che

„ Si dicono asintotiche le linee, la cui curva„ tura normale è eguale a zero."

Ricordando le (3) del § 116 si può anche dire che

„ Affinchè una congruenza λ_r sia asintotica è „ necessaria e basta che per essa i coefficienti b_{rs} del„ la seconda forma fondamentale assumano espres-

sioni della forma

$$b_{rs} = \mu(\lambda_r \bar{\lambda}_s + \bar{\lambda}_r \lambda_s) + \beta \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s .$$

In fine, avendo presenti le (16) del § 121 possiamo anche dire che

„ Le linee asintotiche sono quelle, il cui pia-
„ no osculatore coincide col piano tangente alla su-
„ perficie."

La (α_2) per $\vartheta' = \vartheta$ assume la forma

$$\tang^2 \vartheta = -\frac{\omega_1}{\omega_2} , \qquad 12)$$

e ci dice che

1° „ Sopra ogni superficie esistono due congruen-
„ ze asintotiche, reali e coincidenti, reali e di-
„ stinte od immaginarie secondo che la curvatura
„ totale della superficie, è nulla, negativa o positiva.

2° „ Le direzioni delle asintotiche coincidono in
„ ogni punto della superficie con quelle degli a-
„ sintoti della indicatrice di Dupin relativa a
„ quel punto."

I punti di una superficie si dicono poi parabo-lici od ellittici; secondo che per essi le asintotiche della superficie sono reali e coincidenti, reali e distinte od immaginarie; il che, per quanto si è visto, equivale a dire, secondo che in essi la curvatura totale è nulla, negativa e positiva.

Le superficie sviluppabili sono dunque super-

ficie a punti tutti parabolici; e le superficie sferiche superficie a tutti punti ellittici.

Vediamo ora che forma assumono le equazioni fondamentali (g) e (c) del § 117 e le intrinseche (i) ed (i') del § 118, quando si supponga che le linee λ_r siano asintotiche; per il che basterà porre in quelle equazioni $\alpha = 0$

Noi troviamo quindi le dette equazioni sotto le forme seguenti

$$\mu^2 = -G$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1}^{2}{}_p\, \mu^{(p)}\lambda_p + 2\mu(\gamma) - \beta\,\gamma = 0 \\ \sum_{1}^{2}{}_\mu\, \mu^{(p)}\bar\lambda_p - \sum_{1}^{2}{}_p\, \beta^{(p)}\lambda_p - 2\mu\,\gamma - \beta(\gamma) = 0 \end{aligned}\right\} c_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_r &= \eta\,\varphi_r + \mu\,\zeta\,\bar\lambda_r \\ \eta_r &= -\xi\,\varphi_r + \zeta(\mu\,\lambda_r + \beta\bar\lambda_r) \\ \zeta_r &= -\mu\,\eta\,\lambda_r - (\beta\,\eta + \mu\,\xi)\,\bar\lambda_r\,; \end{aligned}\right\} i_2)$$

$$y_r = \xi\,\lambda_r + \eta\,\bar\lambda_r \qquad i')$$

Dalle (18) e (19) del § 121 si rileva che per le linee asintotiche è $\mu = -\tau$; così che la (g_2) ci dà

$$\tau^2 = -G.$$

In questa relazione consiste il teorema di Enneper, che quindi si enuncia nel modo seguente

„ In ogni punto di una superficie il quadrato della torsione delle asintotiche eguaglia „ la curvatura totale cambiata di segno della superficie in quel punto."

Le formule (c_2) sono dovute al Raffy.

133. Sia ancora λ_r una congruenza qualunque di linee tracciate sulla superficie rappresentata dalle equazioni intrinseche del § 116. - Dalle formole (6) del § 117 si traggono le

$$\left.\begin{aligned}\sum_{1}^{2}{}_{rst}\, b_{rst}\, \lambda^{(r)}\lambda^{(s)}\lambda^{(t)} &= \frac{d\alpha}{ds} - 2\mu\gamma \\ \sum_{1}^{2}{}_{rst}\, b_{rst}\, \lambda^{(r)}\lambda^{(s)}\bar{\lambda}^{(t)} &= \frac{\delta\alpha}{\delta s} - 2\mu(\gamma)\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema triplo simmetrico di elementi b_{rst} sia identicamente nullo sono dunque espresse dalle equazioni

$$\frac{d\alpha}{ds} = 2\mu\gamma, \; \frac{\delta\alpha}{\delta s} = 2\mu(\gamma),$$

le quali dovranno essere identicamente soddisfatte per ogni congruenza λ_r. In particolare per le congruenze delle linee di curvatura essendo $\mu = 0$, ne segue che ω_1 ed ω_2 devono essere costanti. Dalle (c_1) segue poi che ω_1 ed ω_2 possono essere costanti solamente in due casi; cioè se è $\gamma = (\gamma) = 0$ nel qual caso (§ 82 e 128) la superficie è un cilindro retto a base circolare; ovvero se è $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, nel qual caso (§ 127) si ha una superficie sferica di raggio $\left|\frac{1}{\omega}\right|$. Concludiamo che

„ L'annullarsi identicamente della forma
„ cubica

$$\chi = \sum_1^3{}_{rst}\, b_{rst}\, dx_r\, dx_s\, dx_t$$

„caratterizza le superficie dei cilindri retti a base „circolare ovvero le superficie sferiche, secondo „che l'invariante di Gauss relativo alla prima „forma fondamentale è eguale o diverso da o; „nello stesso modo come l'annullarsi della secon„da forma fondamentale caratterizza (§ 127) la „superficie piana."

Supponendo ora la forma χ e la congruenza λ_r qualunque, richiamiamo la prima delle (12) e consideriamo invece della linea λ_r la geodetica ad essa tangente. — La χ resterà invariata, mentre $\underline{\alpha}$ rappresenterà la flessione di questa geodetica e $\underline{\gamma}$ risulterà eguale a $\underline{o}$. Ricordando le espressioni degli elementi $\lambda^{(r)}$, abbiamo così dalla formola citata il significato geometrico della forma cubica χ; poichè essa ci dice che

„ Per ogni linea tracciata sulla superficie de„terminata dalle due forme fondamentali

$$\varphi = \sum_1^2{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,, \quad \psi = \sum_1^2{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

„il rapporto della forma cubica

$$\chi = \sum_1^2{}_{rst}\, b_{rst}\, dx_r\, dx_s\, dx_t$$

„alla prima forma fondamentale è eguale all'au„mento che subisce la flessione della geodetica tan„gente alla linea considerata per uno spostamen-

„ to infinitesimo lungo la linea stessa."

Siccome nel caso di $G=0$ questo aumento è identicamente nullo pei cilindri retti a base circolare; e per $G>0$ per le sfere; così l'aumento stesso diviso per ds, ovvero il rapporto

$$\frac{X}{ds^3}=\sum_{1}^{2}{}_{rst}\, b_{rst}\,\lambda^{(r)}\lambda^{(s)}\lambda^{(t)}$$

potrà dirsi per le superficie sviluppabili curvatura cilindrica; e per ogni altra superficie curvatura sferica delle linee λ_r.

Capitolo Terzo

Della rappresentazione sferica di Gauss.

Proprietà dell'elemento lineare della sfera di raggio 1. — Concetto della rappresentazione sferica e sue formole e proprietà fondamentali — Rappresentazione intrinseca di una superficie per mezzo della seconda e terza formola fondamentale. — Integrazione delle equazioni intrinseche. — Espressioni delle curvature totale e media. — Cenno sulle coordinate tangenziali.

134. Per la superficie della sfera di raggio 1 avente il centro nella origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali y_1, y_2, y_3 i coseni di direzione del-

la normale ξ_1, ξ_2, ξ_3 coincidono colle coordinate y_1, y_2, y_3 e però, come risulta dalla (10) del § 118, la seconda forma fondamentale coincide colla prima cambiata di segno. Da ciò e dal § 116 segue che, se

$$f = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, c_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

è una espressione del quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio 1, le coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 di una tale sfera comunque situata nello spazio soddisfanno alle equazioni

$$\xi_{rs} = -\xi c_{rs} \;;$$

in cui le ξ_{rs} sono gli elementi del primo sistema derivato secondo f da quello di elementi ξ_r.

Di più segue dalla equazione (G) del paragrafo stesso, e potrebbe dedursi anche dal significato geometrico dell'invariante di Gauss, che questo per la forma f è eguale all'unità. Siccome poi sappiamo dalla Introduzione (§ 46) che due forme differenziali quadratiche positive, i cui invarianti di Gauss sono eguali ad una stessa costante, sono equivalenti, possiamo altresì asserire che, reciprocamente, ogni forma differenziale quadratica positiva, il cui invariante di Gauss sia eguale all'unità, può assumersi come espressione del quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio 1.

135. Sia ora S una superficie qualunque, la quale riferita a tre assi cartesiani ortogonali di origine O abbia le equazioni

$$y_h = y_h(x_1, x_2) ,$$

e si indichi con σ la superficie della sfera di raggio 1 avente il centro in O. Se per O si conduce la parallela alla normale alla superficie S in un suo punto qualunque P diretta nello stesso senso e il punto P_0, in cui questa normale incontra la superficie σ, si riguarda come immagine di P si ha in generale[1] una rappresentazione della superficie S sulla sfera σ cioè una corrispondenza tra i punti dell'una e quelli dell'altra tale che, almeno per limitate regioni di S ad ogni punto P di S corrisponde un'unica e determinata immagine P_0 sopra σ, e reciprocamente ad ogni punto P_0 corrisponde un solo punto obbiettivo P di S. Questa rappresentazione è di grande utilità per lo studio delle superficie e da Gauss, che la introdusse nella scienza, prende il nome di rappresentazione sferica di Gauss.

Conserviamo per la superficie S le notazioni, di

---

(1) Vedremo nel Capitolo successivo a questo che fanno eccezione soltanto le superficie sviluppabili.

cui abbiamo fatto uso nei paragrafi precedenti e notiamo che, indicando con ds_0 la distanza dei punti P_0 e P'_0 della sfera immagini di due punti P e P' di S vicinissimi e del resto qualunque, sarà

$$ds_0^2 = \sum_1^3{}_h \, d\mathfrak{J}_h^2$$

cioè per le equazioni (i_1) del § 126

$$ds_0^2 = \omega_1^2 \sum_1^2{}_{rs} \lambda_r \lambda_s \, dx_r \, dx_s + \omega_2^2 \sum_1^2{}_{rs} \overline{\lambda}_r \overline{\lambda}_s \, dx_r \, dx_s .$$

Indichiamo ora con H la somma delle due curvature principali e, come prima, con $\underline{G}$ la curvatura totale. La equazione

$$\omega^2 + H\omega + G = 0$$

ammetterà come radici ω_1 ed ω_2 e però per le (5) del § 41 e le (4) del § 124, posto

$$c_{rs} = -G a_{rs} - H b_{rs} \quad , \qquad 1)$$

$$f = \sum_1^2{}_{rs} c_{rs} \, dx_r \, dx_s \quad , \qquad A)$$

sarà

$$ds_0^2 = f$$

La forma $\underline{f}$, che si chiama anche terza forma fondamentale per la superficie $\underline{S}$, rappresenta dunque il quadrato dell'elemento lineare della sfera Σ, quando per i punti di questa considerati come immagini dei punti di $\underline{S}$ si assumono come coordinate quelle dei punti obbiettivi. Per le (1) la (A) si può anche mettere sotto la forma

$$f \equiv -G\varphi - H\psi, \qquad (6_1)$$

indicando con ψ la seconda forma fondamentale relativa ad S.

136. Supponiamo che la superficie $\underline{S}$ non sia sviluppabile, cioè (§ 67) che sia $G \lessgtr 0$ e vediamo alcune proprietà delle rappresentazioni di Gauss. — Sia λ_r una congruenza di linee tracciate sulla superficie obbiettiva S, $\lambda_{0|r}$ quella delle immagini sulla sfera σ. Avremo

$$\lambda^{(r)} = \rho\, \lambda_0^{(r)},$$

posto

$$\rho^2 = -G - H\alpha;$$

indicando con $-\underline{\alpha}$ la curvatura normale delle linee λ_r. Per un'altra congruenza $\lambda'^{(r)}$, indicando con $-\alpha'$ la curvatura normale delle sue linee, avremo analogamente

$$\lambda'^{(r)} = \rho'\, \lambda_0'^{(r)}$$

con

$$\rho'^2 = -G - H\alpha'.$$

Designamo ora con ϑ l'angolo, sotto cui si incontrano sulla superficie S le congruenze λ_r e λ'_r, con ϑ_0 quello, sotto cui si incontrano sopra $\underline{\sigma}$ le loro immagini. Avremo (§ 63).

$$\cos\vartheta_0 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, c_{rs}\, \lambda_0^{(r)} \lambda_0'^{(s)}$$

ovvero

$$\rho\rho'\cos\vartheta_0 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, c_{rs}\, \lambda^{(r)} \lambda'^{(s)},$$

o in fine, per le (1),

$$\rho\rho' \cos\vartheta_0 = -\mathcal{G}\cos\vartheta - H\sum_{1\,rs}^{2} b_{rs}\,\lambda^{(r)}\lambda'^{(s)}.$$

Ora ricordando le (11) del § 131, si riconosce facilmente che, se le congruenze λ_r e λ'_r sono coniugate, è

$$\rho^2\rho'^2 = \mathcal{G}^2$$

e quindi

$$\rho\rho' = \pm\mathcal{G}.$$

valendo il segno superiore o l'inferiore, secondo che $\underline{\mathcal{G}}$ è positiva o negativa, poichè $\underline{\rho}$ e ρ' sono essenzialmente positivi. Avremo dunque

$$\cos\vartheta_0 = \mp\cos\vartheta,$$

valendo il segno superiore o l'inferiore secondo che il punto, che si considera nella superficie $\underline{S}$, è ellittico od iperbolico. Si ha così che

„ Nella rappresentazione sferica l'angolo di „ due direzioni coniugate sulla superficie viene „ conservato in grandezza o cangiato nel supplementare secondo che il punto, da cui escono „ le due direzioni, è iperbolico od ellittico. „

Ricordando la formola (10) del § 118, si vede che la equazione delle asintotiche si può mettere sotto la forma

$$\sum_{1\,h}^{3} dy_h\, d\mathfrak{J}_h = 0,$$

dalla quale segue che

„ Le linee asintotiche sono caratterizzate dall'essere ortogonali alle loro immagini nella „ rappresentazione sferica."

Analogamente si vede che

„ Le linee di curvatura sono parallele alle „ loro immagini nella rappresentazione stessa."

137. Indicando con $\underline{c}$ il discriminante della forma $\underline{f}$, dalle (1) si ricava

$$c = G^2 . a . \qquad 2)$$

Se quindi si designano rispettivamente con $d\sigma$ l'elemento d'area della superficie $\underline{S}$, con $d\sigma_0$ la sua immagine sulla superficie sferica σ, si ha (§ 64)

$$d\sigma_0 = \pm G \, d\sigma ,$$

valendo il segno superiore pei punti ellittici, l'inferiore per gli iperbolici. Vediamo così che

„ Se sopra una superficie ed intorno ad un suo „ punto qualunque P si traccia una linea chiusa „ $\underline{c}$ e questa si fa decrescere in modo che essa tenda a confondersi col punto stesso, il rapporto tra „ l'area racchiusa da $\underline{c}$ sulla superficie e quella racchiusa dalla sua immagine nella rappresentazione sferica converge verso la curvatura totale „ della superficie nel punto P."

È questa anzi la definizione data da Gauss per la curvatura totale.

138. Riprendiamo dal § 118 le formole

$$J_r = - \sum_1^2{}_s \, b_{rs} \, y^{(s)} \qquad 3)$$

ovvero
$$\mathfrak{I}_r = -\sum_{1\,pq}^{2} a^{(pq)} b_{pr}\, y_q \ ,$$
le quali valgono se per y e $\mathfrak{I}$ si sostituiscono y_h e $\mathfrak{I}_h$ per $h = 1, 2, 3$. Ricordando il significato di H, si avrà
$$H = -\sum_{pq} a^{(pq)} b_{pq}$$
e però le (3) scritte sopra potranno mettersi sotto la forma
$$\mathfrak{I}_p = H\, y_p + \sum_{1\,r}^{2} a^{(r\,p+1)} (y_p\, b_{r\,p+1} - y_{p+1}\, b_{rp}) \ , \qquad 3')$$
convenendo ancora di riguardare come equivalenti due indici, se sono amendue pari, od amendue dispari. Designando con $\beta^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca a Ψ abbiamo poi
$$a.\, a^{(r\,p+1)} = (-1)^{r+p+1} a_{r+1\,p} \ , \quad b.\, \beta^{(r+1\,p)} = (-1)^{r+p+1} b_{r\,p+1}$$
e quindi, ricordando anche la ($\mathcal{G}$) del § 116,
$$\sum_{1\,r}^{2} a^{(r\,p+1)} b_{r\,p+1} = \mathcal{G} \sum_{1\,r} \beta^{(rp)} a_{rp}$$
$$\sum_{1\,r}^{2} a^{(r\,p+1)} b_{rp} = -\mathcal{G} \sum_{r} \beta^{(r\,p+1)} a_{rp} \ .$$
Per queste le (3') assumono la forma
$$\mathfrak{I}_p = H \sum_{1\,rs}^{2} \beta^{(rs)} b_{rp}\, y_s + \mathcal{G} \sum_{1\,rs}^{2} \beta^{(rs)} a_{rp}\, y_s \ ,$$
ovvero per le (1)
$$\mathfrak{I}_p = -\sum_{1\,rs}^{2} \beta^{(rs)} c_{rp}\, y_s \ .$$
Queste poi risolute rispetto alle y_r danno le
$$y_r = -\sum_{1\,pq}^{2} \gamma^{(pq)} b_{pr}\, \mathfrak{I}_q \ , \qquad II)$$
nelle quali con $\gamma^{(pq)}$ si sono rappresentati i coeffi-

cienti della forma reciproca alla f.

Le formule (II) sono notevoli perchè esprimono le derivate prime delle y per quelle delle $\mathfrak{Y}$ senza contenere i coefficienti della prima forma fondamentale. Ne risulta (e ce ne renderemo presto ragione anche in altro modo) che una superficie non sviluppabile può considerarsi come definita anche mediante la seconda e terza forma fondamentale, prescindendo dalla prima. Come terza forma fondamentale si può, naturalmente, assumere qualunque espressione del quadrato dell'elemento lineare della sfera, cioè (§ 134) qualunque forma differenziale quadratica positiva, il cui invariante di Gauss sia eguale all'unità; ma si può chiedersi a quali condizioni deve soddisfare una forma differenziale quadratica

$$\psi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, b_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

perchè esista una superficie, che la ammetta come seconda forma fondamentale, data la terza forma fondamentale f.

Dimostreremo che le condizioni cercate consistono in ciò che sia simmetrico il primo sistema derivato covariantemente secondo f dai coefficienti di ψ.

Riguardiamo come forma fondamentale la f e deriviamo le (II) covariantemente secondo f, designando ora con y_{pq} e b_{prs} gli elementi dei sistemi derivati secondo f rispettivamente da quelli di elementi y_p e b_{pr} e ricordando che le ζ soddisfanno alle (I). Troviamo così le

$$y_{rs} = -\sum_{1\,pq}^{2} \gamma^{(pq)} b_{prs} \zeta_q + \zeta b_{rs} \quad ,$$

le quali ci dicono che assieme alle (I) e (II) debbono essere soddisfatte le

$$\sum_{1\,pq}^{2} \gamma^{(pq)} \zeta_{h|q} (b_{prs} - b_{psr}) = 0 . (h = 1, 2, 3)$$

Se in queste riguardiamo come incognite le $b_{prs} - b_{psr}$, abbiamo un sistema di tre equazioni lineari ed omogenee con due incognite, la cui matrice, come è facile riconoscere, non è nulla, perchè il suo quadrato è uguale ad $\frac{1}{c}$. Ne segue che, come avevamo asserito, devono essere soddisfatte le condizioni

$$b_{prs} = b_{psr} \qquad B)$$

Supposte poi soddisfatte le condizioni (B), è facile riconoscere che è completo il sistema, che comprende le equazioni (I), le (II) e la

$$\sum_{pq} \gamma^{(pq)} \zeta_p \zeta_q = 1 - \zeta^2 \qquad III)$$

Supponiamo di avere determinato l'integrale generale $\mathfrak{J}$, che conterrà due costanti arbitrarie, poniamo

$$\mathfrak{J}_1 = \sqrt{1-\mathfrak{J}^2}\,.\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \quad \mathfrak{J}_2 = \sqrt{1-\mathfrak{J}^2}\cos\vartheta, \qquad 4)$$

e vediamo di determinare ϑ in modo da soddisfare alle equazioni

$$\mathfrak{J}_{1|r}\,\mathfrak{J}_{1|s} + \mathfrak{J}_{2|r}\,\mathfrak{J}_{2|s} + \mathfrak{J}_r\,\mathfrak{J}_s = c_{rs}\,.$$

Riconosceremo facilmente che ϑ deve soddisfare alle equazioni

$$(1-\mathfrak{J}^2)\,\vartheta_r\,\vartheta_s = (1-\mathfrak{J}^2)c_{rs} - \mathfrak{J}_r\,\mathfrak{J}_s\,, \quad IV)$$

che queste, per la (III), sono compatibili fra di loro, e che costituiscono un sistema completo. Infatti derivate covariantemente, assumendo f come forma fondamentale, esse danno le

$$(1-\mathfrak{J}^2)(\vartheta_r\,\vartheta_{st} + \vartheta_s\,\vartheta_{rt}) = \mathfrak{J}\left(\mathfrak{J}_r c_{st} + 2\mathfrak{J}_t c_{rs} + \mathfrak{J}_s c_{rt} - \frac{4}{1-\mathfrak{J}^2}\mathfrak{J}_r\mathfrak{J}_s\mathfrak{J}_t\right),$$

le quali equivalgono alle

$$\vartheta_t\,\vartheta_{rs} = \mathfrak{J}\left(c_{rt}\,\mathfrak{J}_s + c_{st}\,\mathfrak{J}_r - \frac{2}{1-\mathfrak{J}^2}\mathfrak{J}_r\,\mathfrak{J}_s\,\mathfrak{J}_t\right).$$

La integrazione della (IV) non richiede che una quadratura ed introduce una costante arbitraria additiva c, talchè, indicando con ϑ un integrale particolare del sistema (IV), con $\mathfrak{J}_3$ l'integrale generale del sistema (I, III) le (4) assumono la forma

$$\mathfrak{J}_1 = \sqrt{1-\mathfrak{J}_3^2}\,.\,\mathrm{sen}\,(\vartheta + c)$$
$$\mathfrak{J}_2 = \sqrt{1-\mathfrak{J}_3^2}\,.\,\cos\,(\vartheta + c)\,.$$

In fine per determinare y_1, y_2, y_3, come ci dicono le (II), basterà integrare i tre sistemi

$$y_{h|r} = -\sum_{pq} \gamma^{(pq)} b_{pr} J_{h|q} \qquad 5)$$
$$(h = 1,2,3 \,;\, r = 1,2)$$

il che richiederà soltanto quadrature.

139. Dalle considerazioni svolte nel paragrafo precedente risulta, che per le superficie non sviluppabili tutta la teoria potrebbe essere fondata sulla loro rappresentazione sferica. In tal caso le equazioni (B) prenderebbero il posto delle equazioni fondamentali, e le (I, II, III, IV) quello di equazioni intrinseche. — Non ci dilungheremo su tale argomento, ma ci limiteremo a stabilire ancora alcune formole generali, che a questa teoria si riferiscono.

Osserviamo prima di tutto, che dalle (4) combinate colle (J_1) del § 116 seguono le

$$a_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_{pq} \gamma^{(pq)} b_{pr} b_{qs} ,$$

per le quali dalla seconda e terza forma fondamentale si risale alla prima. Ricordando anche la (2), si riconosce facilmente che ad esse equivalgono le

$$a^{(rs)} = \sum_{1}^{2}{}_{pq} c_{pq} \beta^{(pr)} \beta^{(qs)},$$

dalle quali per la somma H delle curvature principali della superficie si ricava la espressione

$$H = -\sum_{1\,pq}^{2} \beta^{(pq)} c_{pq} \; ; \qquad 6)$$

od anche

$$H = -\mathcal{G} \cdot \sum_{1\,pq}^{2} \gamma^{(pq)} b_{pq} \; ; \qquad 6_1)$$

che dànno H espressa per la seconda e terza forma fondamentale.

Dalla ($\mathcal{G}$' del § 116 e dalla (2) ricaviamo invece per la curvatura totale la espressione

$$\mathcal{G} = \frac{c}{b} \qquad 7)$$

140. Della importanza della rappresentazione sferica per la teoria della superficie possiamo anche renderci ragione osservando che, se si considera una superficie come inviluppo dei suoi piani tangenti, essa risulta determinata dai coseni di direzione ξ_1, ξ_2, ξ_3 della normale e dalla sua distanza $\underline{w}$ dalla origine. Per questa ragione ξ_1, ξ_2, ξ_3 e $\underline{w}$ costituiscono un sistema di coordinate, che si dicono tangenziali, per lo studio delle superficie, le ξ essendo legate dalla relazione

$$\sum_{1\,h}^{3} \xi_h^2 = 1 .$$

E' facile stabilire le relazioni, che legano la coordinata $\underline{w}$ colla seconda e terza forma fondamentale, da aggiungersi alle (I), che riguardano le ξ. Si parta perciò dalla relazione

$$w = \sum_{1\,h}^{3} y_h \xi_h \qquad 8)$$

data dalla Geometria analitica, la quale derivata, ricordando le (2) del § 116, dà le

$$W_r = \sum_{1}^{3}{}_h \, y_h \, \mathfrak{I}_{h|r} \,. \qquad 9)$$

Indicando con W_{rs} gli elementi del primo sistema derivato da quello di elementi W_r secondo f, dalle (9), ricordando anche le (I) e la (10) del § 118 ricaviamo le

$$W_{rs} = -W c_{rs} - b_{rs} \quad , \quad V)$$

le quali ci dànno gli elementi della seconda forma fondamentale espressi per W. — Mentre quindi le espressioni di $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3$ determinano per le (I) la terza forma fondamentale, le (V) ad esse analoghe dànno la seconda espressa per la coordinata W e per le sue derivate prime e seconde. Dalle (V) poi, dalle (6) e dalle (7) ricaviamo le seguenti espressioni di H e G, nelle quali gli invarianti differenziali di W sono presi sempre riferendosi alla forma f come fondamentale

$$\frac{H}{G} = 2W + \Delta_2 W$$

$$\frac{1}{G} = W^2 + W \Delta_2 W + \Delta_{22} W \,. —$$

Capitolo Quarto

Di alcune classi speciali di superficie.

Superficie sviluppabili — Superficie a curvatura costante negativa — Superficie di rotazione — Superficie minime — Superficie curvatura media costante — Superficie rigate — Superficie canali.

---

141. Cominciamo dall'occuparci delle superficie sviluppabili, escluso il piano, di cui si è già parlato (§ 128), ed assumiamo come linee λ_r le asintotiche. — Essendo in questo caso $G = 0$, le equazioni fondamentali (c_2) del § 132 (nelle quali si dovranno scambiare i simboli λ_r e $\bar{\lambda}_r$, γ e $-(\gamma)$) assumeranno la forma

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma) = 0 \\ &\sum_{1}^{2} {}_r \beta^{(r)} \lambda_r = \beta \gamma . \end{aligned}\right\} c_3)$$

Le linee $\bar{\lambda}_r$ sono quindi geodetiche ed asintotiche e però la loro flessione è nulla; in altre parole esse sono linee rette. — Se poi confrontiamo le (c_3) colle (c_1) del § 129 vediamo che le linee $\bar{\lambda}_r$ sono anche linee di curvatura.

Poichè le superficie sviluppabili provengono tutte dal piano per deformazioni, che lasciano inalterato il suo elemento lineare, possiamo concludere che

„ Le deformazioni del piano, che lasciano
„ inalterato il suo elemento lineare, sono tali che

„una congruenza di rette rimane tale anche
„dopo la deformazione. Le rette di questa con-
„gruenza si dicono generatrici per la superficie
„sviluppabile ed assumono per queste il carat-
„tere tanto di linee asintotiche quanto di li-
„nee di curvatura."

Per ogni integrale β della equazione (c_3) la corrispondente superficie ha le equazioni intrinseche, che risultano dalle (j) del § 29 ponendovi $\omega = \beta$.

Se quindi si assume sul piano una congruenza qualunque di rette e si indica con λ_γ il sistema coordinato delle sue traiettorie ortogonali; con γ la flessione di queste traiettorie, ad ogni integrale della equazione (c_3) corrisponde una superficie sviluppabile, che ha le rette $\bar{\lambda}_\gamma$ come generatrici e però

„Ad ogni congruenza di rette nel piano
„corrispondono infinite superficie sviluppabi-
„li, che hanno come generatrici le rette della
„congruenza."

Se sul piano assumiamo una congruenza di rette parallele, anche la congruenza ortogonale risulta di rette parallele e però si ha $\gamma = 0$, e dalle (j) del § 129 risulta che i coseni di direzio-

ne, η_1, η_2, η_3 delle generatrici sono costanti. Queste sono dunque tutte parallele fra di loro e perciò la superficie è cilindrica.

142. Le equazioni intrinseche delle superficie sviluppabili ci dicono ancora che il triedro $(\xi_h \eta_h \zeta_h)$ si muove parallelamente a se stesso, cioè senza ruotare, quando il suo vertice si sposta lungo una generatrice. Ciò significa in altri termini, che la normale alla superficie lungo una stessa generatrice si mantiene sempre parallela a sè stessa e quindi che

„ Il piano tangente ad una superficie sviluppabile in un punto è ad essa tangente lungo tutta la generatrice, che passa per quel punto."

Se indichiamo con Y_1, Y_2, Y_3 le coordinate del punto corrente P di una generatrice qualunque g, con ρ la distanza del punto P da un determinato punto P_0 di g di coordinate y_1, y_2, y_3 contata da P_0 verso P, le equazioni della generatrice stessa sono

$$Y_h - y_h = \rho\, \eta_h \;;$$

e quelle della generatrice, che passa per un punto P'_0 vicinissimo a P_0,

$$\mathcal{Y}_h - y_h - dy_h = \rho\,\eta_h + \eta_h\,d\rho + \rho\,d\eta_h\,,$$

Le condizioni perchè le due generatrici si incontrino sono quindi date dalle equazioni

$$dy_h + \eta_h\,d\rho + \rho\,d\eta_h = 0\,. \qquad 1)$$

Prendiamo il punto P'_0 sulla stessa traiettoria ortogonale alle generatrici, su cui si trova il punto P_0. Dalle equazioni intrinseche ricaviamo allora le

$$dy_h = \zeta_h \sum_r \lambda_r\,dx_r$$
$$d\eta_h = -\gamma\,\zeta_h \sum_r \lambda_r\,dx_r\,,$$

per le quali le (1) dànno

$$\rho\gamma = 1\,, \quad d\rho = 0\,.$$

Così vediamo che due generatrici consecutive di una superficie sviluppabile si incontrano; che il loro punto d'incontro è equidistante dai punti delle generatrici situati sopra una stessa traiettoria ad esse ortogonali; e che tale comune distanza è eguale all'inversa della curvatura geodetica della traiettoria stessa. Il luogo dei punti d'incontro di due generatrici successive qualunque è lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile. — Tuttociò poteva dedursi con semplici considerazioni geometriche dalla teoria delle curve piane; osservando che una congruenza di rette sul pia-

no inviluppa una curva c, le cui sviluppanti non sono che le traiettorie ortogonali delle rette della congruenza; e che dopo una deformazione, per la quale queste riescono le generatrici di una superficie sviluppabile, la curva c diventa lo spigolo di regresso della superficie stessa, mentre la flessione delle sviluppanti si cambia nella curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle generatrici.

Poichè, come si è visto, le normali ad una superficie sviluppabile lungo una generatrice sono tutte parallele, nella rappresentazione sferica ogni generatrice ha per immagine un punto e tutta la superficie sviluppabile è quindi rappresentata da una linea. Reciprocamente, se la rappresentazione sferica di una superficie si riduce ad una linea, la terza forma fondamentale deve potersi ridurre a contenere una sola variabile, per il che si richiede che il suo discriminante sia nullo, cioè per la (2) del § 137, che la superficie sia sviluppabile. — Dunque le superficie sviluppabili sono le sole, per le quali la rappresentazione sferica si riduce ad una linea.

143. Vediamo ora quale forma assumano le equazioni fondamentali e le equazioni intrinseche del § 132 per le superficie a curvatura costante negativa; per le quali così assumiamo come congruenza λ_r una congruenza asintotica. Nelle equazioni citate dovremo supporre μ costante, reale e diverso da 0 e però le equazioni (c_2) assumeranno la forma

$$\left.\begin{array}{r} \beta\gamma = 2\mu(\gamma) \\ \sum_1^2{}_p \beta^{(p)}\lambda_p = 2\mu\gamma + \beta(\gamma), \end{array}\right\} \quad 2)$$

rappresentandosi con $-\beta$ la flessione delle linee $\bar{\lambda}_r$. Queste equazioni ci dicono che non può essere $(\gamma) = 0$, poichè ne seguirebbe $\gamma = 0$ e sappiamo (§ 82) che sopra una superficie non sviluppabile non esiste alcun fascio di linee a curvatura nulla. Poniamo, come nel § 83,

$$\alpha = \text{arc tang} \frac{(\gamma)}{\gamma}, \qquad 3)$$

cioè indichiamo con α l'angolo, che le linee di curvatura del fascio φ_r, cui appartiene la congruenza λ_r, fanno con queste linee. Le equazioni (2) assumono la forma

$$\beta = 2\mu \,\text{tang}\, \alpha \qquad 4)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \gamma, \qquad 5)$$

con ds rappresentandosi ancora l'elemento d'arco delle linee λ_r. Queste sono dunque le equa-

zioni fondamentali delle superficie, quando come linee λ_r si assuma un sistema di asintotiche. Determinato questo sistema in modo che sia soddisfatta la (5), in cui per $\underline{\alpha}$ si intenda posta la espressione data dalla (3), la (4) ci darà $\underline{\beta}$. — Le equazioni fondamentali assumono poi la forma

$$\zeta_r = \eta \varphi_r + \mu \vartheta \lambda_r$$
$$\eta_r = -\zeta \varphi_r + \mu \vartheta (\lambda_r + 2 \tang \alpha \bar{\lambda}_r)$$
$$\vartheta_r = -\mu \zeta \eta \lambda_r + \zeta \bar{\lambda}_r + 2\eta \tang \alpha \bar{\lambda}_r \} ,$$

essendo

$$\varphi_r = \sqrt{\gamma^2 + (\gamma')^2} \, (\cos \alpha \, \lambda_r + \operatorname{sen} \alpha \, \bar{\lambda}_r) .$$

La determinazione di tutte le superficie, per cui il quadrato dell'elemento lineare è espresso da una forma data $\underline{\varphi}$ ad invariante di Gauss negativo e costante, è così ridotta a dipendere da quella di tutte le congruenze di linee tracciate sulle superficie φ e per le quali è verificata la condizione espressa dalla (5). — Ogni congruenza λ_r, che si trovi in questo caso, è tale che risulta delle linee asintotiche per una delle superficie cercate; — come lo stesso problema relativo alle superficie sviluppabili si risolve perchè si conoscono tutte le congruenze geodetiche del piano. Finora però non è riescito di stabi-

lire un risultato analogo per le superficie a curvatura costante positiva.

144. Indicando sempre con y_1, y_2, y_3 un sistema qualunque di coordinate cartesiane ortogonali, indicheremo invece con x, y, z un determinato sistema della stessa natura avente con quello comune l'origine. Tra i due sistemi avranno luogo relazioni della forma

$$x = \sum_1^3 {}_i\, a_i y_i\,, \quad y = \sum_1^3 {}_i\, b_i y_i\,, \quad z = \sum_1^3 {}_i\, c_i y_i\,, \qquad 6)$$

i coefficienti a_i, b_i e c_i essendo quelli di una sostituzione ortogonale a tre variabili, — e, indicando con ρ il raggio vettore, che dall'origine va a un punto qualunque dello spazio, sarà

$$\rho^2 = \sum_1^3 {}_i\, y_i^2 \qquad 7)$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_1^3 {}_i\, c_i \xi_i\,, \quad \mathcal{B} = \sum_1^3 {}_i\, c_i \eta_i\,, \quad \mathcal{C} = \sum_1^3 {}_i\, c_i \zeta_i \\ \mathcal{N} &= \sum_1^3 {}_i\, y_i \xi_i\,, \quad \sigma = \sum_1^3 {}_i\, y_i \eta_i\,, \quad \tau = \sum_1^3 {}_i\, y_i \zeta_i \end{aligned}\right\} \qquad 8)$$

Se si derivano le (6) (7) ed (8) e per le derivate delle y si sostituiscono le espressioni date dalle equazioni intrinseche del § 127, introducendo così le linee di curvatura λ_r e $\overline{\lambda}_r$ della superficie, si ottengono le

$$\left.\begin{aligned} z_r &= \mathcal{A}\lambda_r + \mathcal{B}\overline{\lambda}_r \\ \rho\rho_r &= \mathcal{N}\lambda_r + \sigma\overline{\lambda}_r \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{A}_r &= \mathcal{B}\varphi_r + \mathcal{C}\omega_1\lambda_r \\
\mathcal{B}_r &= -\mathcal{A}\varphi_r + \mathcal{C}\omega_2\overline{\lambda}_r \\
\mathcal{C}_r &= -\mathcal{A}\omega_1\lambda_r - \mathcal{B}\omega_2\overline{\lambda}_r \\
\mathcal{N}_r &= \sigma\varphi_r + (1+\tau\omega_1)\lambda_r \\
\sigma_r &= -\mathcal{N}\varphi_r + (1+\tau\omega_2)\overline{\lambda}_r \\
\tau_r &= -\mathcal{N}\omega_1\lambda_r - \sigma\omega_2\overline{\lambda}_r .
\end{aligned}\right\} \quad 10$$

Si osservi ora che una curva piana, la quale nel piano $\hat{zy}$ abbia la equazione

$$z = f(y^2),$$

quando questo piano ruoti intorno all'asse delle $\underline{z}$, genera una superficie di rotazione, la cui equazione è

$$z = f\{\rho^2 - z^2\}, \qquad 11$$

così che, considerando $\underline{f}$ come simbolo di una funzione arbitraria, questa può riguardarsi come la equazione generale delle superficie di rotazione, quando il loro asse si assuma come asse delle z. Ci proponiamo di stabilire le equazioni fondamentali e le equazioni intrinseche per questa classe di superficie, quando si assumano come linee λ_r le loro linee di curvatura. – Si indichi con f' la derivata di $\underline{f}$ rispetto all'argomento $\rho^2 - z^2$, si derivi la (11) rispetto alla x_r e si sostituiscano alle derivate di $\underline{z}$ e ρ le loro espressioni date dalle (9). Si giun-

ge così a due equazioni equivalenti alle

$$\mathcal{A} = 2 f' (\mathcal{N} - \mathcal{A} x)$$

$$\mathcal{B} = 2 f' (\sigma - \mathcal{B} x),$$

e per la eliminazione di f' alla

$$\sigma \mathcal{A} = \mathcal{N} \mathcal{B}$$

Questa derivata di nuovo, avendo presenti le (9) e le (10) dà le

$$(1 + \tau \omega_1) . \mathcal{B} = \omega_1 \sigma C$$

$$(1 + \tau \omega_2) . \mathcal{A} = \omega_2 \mathcal{N} C,$$

Se supponiamo $\mathcal{N} = \sigma = 0$, dalle (10) ricaviamo subito $\omega_1 = \omega_2$, cioè otteniamo le sfere. Prescindendo da questo caso, dalle equazioni stabilite sopra risultando che deve essere $\mathcal{N} \sigma = 0$, esse equivarranno alle

$$\mathcal{A} = 0, \ \mathcal{N} = 0, \ (1 + \tau \omega_1) \mathcal{B} = \omega_1 \delta . C .$$

Queste poi derivate ancora e tenendo conto delle (10) e delle (C_1) del § 127 danno

$$(\gamma) = 0$$

e di più

$$\left. \begin{array}{c} \mathcal{B} \gamma + C \omega_1 = 0 \\ (\mathcal{B} \tau - C \sigma) \sum_r \omega_1^{(r)} \lambda_r = 0 \\ (\mathcal{B} \tau - C \sigma) \ \gamma = C \end{array} \right\} \qquad 13)$$

Le (13) sono soddisfatte per

$$\gamma = 0, \ C = 0, \ \tau = 0, \qquad 13')$$

ma in questo caso, per la (12), si hanno le super=

ficie di rotazione sviluppabili, come risulta dal § 12 ed anche dalla seconda delle (13') che deriva da $\omega_2 = 0$.

Senza trattenerci su queste superficie, delle quali sarebbe facile stabilire le equazioni intrinseche, osserviamo che, se non sono soddisfatte le (13'), le (13) assumono la forma

$$\left.\begin{array}{c} B\gamma + C\omega_1 = 0, \sum_r \omega_1^{(r)}\lambda_r = 0 \\ (B\tau - C\sigma).\ \gamma = C, \end{array}\right\} \quad 13_1)$$

alle quali si debbono aggiungere le (g_1) e (c_1) del §. 127, le quali nel nostro caso assumono la forma

$$\omega_1\,\omega_2 = G, \qquad g_2)$$

$$\sum_p \omega_2^{(p)}\lambda_p = 0, \quad \sum_p \omega_{1|p}\bar{\lambda}_p = \delta\gamma \qquad c_2)$$

Da queste e dalla 2^a delle (13_1) ricaviamo le

$$\omega_{1|r} = \delta\gamma\,\bar{\lambda}_r,$$

ovvero

$$\bar{\bar{\omega}}_{1|r} = (\omega_2 - \omega_1)\gamma\lambda_r,$$

le quali ci danno

$$\sum_r \gamma^{(r)}\lambda_r = 0; \qquad 14)$$

mentre la (12) equivale alla

$$\varphi_r = \gamma\,\lambda_r$$

e se ne trae (§ 43) la

$$\sum_r \gamma^{(r)}\bar{\lambda}_r = \gamma^2 + G$$

La prima ed ultima delle (13_1) derivate non dan-

no poi alcuna nuova equazione. Infine la (g_2) derivata dà

$$\sum_p g_p \lambda^{(p)} = 0 \qquad 15)$$

Se g è costante, questa è una identità ed il sistema, che comprende le equazioni

$$\left.\begin{aligned} &\sum_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1 \\ &\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \varphi_s = \gamma \bar{\lambda}_r \lambda_s \\ &\gamma_r = (\gamma^2 + g)\, \bar{\lambda}_r \end{aligned}\right\} 16)$$

$$\omega_{1|r} = \left(\omega_1 - \frac{g}{\omega_1}\right) \gamma \bar{\lambda}_r \qquad 17)$$

è completo rispetto alle funzioni incognite $\lambda_1, \lambda_2, \gamma$, ed ω_1. Il suo integrale generale contiene tre costanti arbitrarie, e quindi abbiamo che

„ Esiste un numero ∞^3 di superficie di rotazione dotate di una stessa curvatura costante diversa da 0 e però applicabili fra di loro."

Per determinare tutte queste superficie dobbiamo integrare il sistema completo (16) e successivamente il sistema (17). Però indicando con μ_r una congruenza qualunque di linee con ψ_r il fascio, a cui essa appartiene, potremo (§ 70) sostituire al sistema (16) il sistema

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_r = \psi_r + \gamma(\operatorname{sen}\vartheta\, \bar{\mu}_r - \cos\vartheta\, \mu_r) \\ &\gamma_r = (\gamma^2 + g)(\cos\vartheta\, \bar{\mu}_r + \operatorname{sen}\vartheta\, \mu_r) \end{aligned}\right\} 16_1)$$

Se $\underline{g}$ non è costante, la (15) determina la congruenza λ_r, poichè ci dice che essa deve risultare delle linee di parametro g. Le (12) e (14) ci dicono poi che

„ Affinchè una forma differenziale quadratica, il cui invariante di Gauss è variabile, rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di rotazione è necessario e basta che le linee di parametro $\underline{g}$ appartengono ad un fascio isotermo e le loro traiettorie ortogonali siano geodetiche."

Risulta pure dimostrato che

„ Verificata la condizione enunciata sopra esiste una semplice infinità di superficie di rotazione, per cui il quadrato dell'elemento lineare è espresso dalla forma data. Esse hanno tutte le linee $\underline{g}$ come le linee di curvatura e le corrispondenti curvature principali si ottengono integrando il sistema completo

$$\omega_r = \left(\omega - \frac{g}{\omega}\right)_{\lambda} \overline{\lambda}_r \,,$$

„ indicandosi con λ_r il sistema coordinato covariante delle linee g."

145. Data una superficie $\underline{S}$ di coordinate cartesiane ortogonali y_1, y_2, y_3, consideriamone un'al-

tra S_1 di coordinate z_1, z_2, z_3, essendo

$$z_h = y_h + \rho\, \mathfrak{I}_h , \qquad 18)$$

e rappresentandosi con ρ una indeterminata, con $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3$, come si è fatto fin qui, i coseni di direzione della normale alla superficie S.

Supponendo, come faremo, ρ infinitesimo, ad ogni punto P di S corrisponderà un punto vicinissimo P_1 di S_1 e, avendosi dalle (18)

$$z_{h|r} = y_{h|r} + \rho\, \mathfrak{I}_{h|r} + \mathfrak{I}_h \rho_r ,$$

se si indicano con ds e ds_1 rispettivamente gli elementi lineari delle superficie S ed S_1 e si pone

$$ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

sarà

$$ds_1^2 = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

essendo

$$\alpha_{rs} = a_{rs} + \rho \sum_{1}^{3}{}_{h} (y_{h|r}\, \mathfrak{I}_{h|s} + y_{h|s}\, \mathfrak{I}_{h|r}) + \sum_{1}^{3}{}_{h} \mathfrak{I}_h (\rho_s\, y_{h|r} + \rho_r\, y_{h|s}) .$$

Ricordando quindi le (2) del § 116 e le (10) del § 118, abbiamo le

$$\alpha_{rs} = a_{rs} - 2\rho\, b_{rs}$$

e, posto

$$\alpha = \alpha_{11}\, \alpha_{22} - \alpha_{12}^2 ,$$

$$\alpha = a\,(1 + 2\rho H + 4\rho^2 G) ,$$

rappresentandosi ancora con $\frac{1}{2} H$ la curvatura media e con G la curvatura totale della superficie. Si ha dunque, a meno di infinitesimi superiori al primo, $\sqrt{\alpha} = \sqrt{a}\,(1 + H\rho)$ e quindi in

dicendo con $d\sigma_1$ l'elemento d'area della superficie S_1 corrispondente all'elemento dS della superficie S

$$d\sigma_1 = (1 + H\rho)\, d\sigma .$$

Considerando ora sopra S una curva chiusa c, se supponiamo che ρ si annulli nei punti di c, la superficie S_1, scegliendo opportunamente ρ, si può far coincidere con qualunque superficie, che passi per la curva c e si discosti pochissimo da S. — Dai principii del Calcolo delle variazioni e dalla espressione trovata sopra per $d\sigma_1$ risulta quindi che, affinchè l'area della porzione di S limitata dalla curva c sia minima in confronto a quella limitata pure da c sopra ogni altra superficie, che passi per questo contorno e si discosti pochissimo da S, è necessario che sia $H = 0$.

Benchè questa condizione non sia anche sufficiente, pure si sogliono chiamare superficie d'area minima o, brevemente, superficie minime tutte quelle, la cui curvatura media è eguale a 0; in altri termini quelle per cui le curvature principali sono in ogni punto eguali in valore assoluto, ma contrarie di segno. Di questa classe di superficie non dimo-

streremo qui se non alcune proprietà fondamentali.

146. Prima di tutto risulta dalle formule (1) del § 135 che, astrazion fatta dalle superficie sferiche, la rappresentazione sferica riesce conforme per le superficie d'area minima e per queste superficie solamente. Infatti, poichè in questo caso i coefficienti c_{rs} della forma χ debbono essere proporzionali a quelli a_{rs} di φ, o dovrà essere $H=0$, ovvero dovranno essere i coefficienti b_{rs} proporzionali agli a_{rs}, nel qual caso (§ 128) la superficie è sferica.

Le superficie minime sono caratterizzate altresì dalla proprietà che sopra di esse le due congruenze di linee asintotiche sono ortogonali fra di loro; come risulta dalla (12) del § 132.

Osserviamo ancora che per le superficie minime essendo $\beta=0$ le equazioni (c_2) del § 132 assumono la forma

$$\frac{d \log(-G}{dx_p} = 4\,\overline{\varphi}_p$$

Possiamo quindi concludere (§ 37) che

„Le due congruenze di linee asintotiche
„sopra una superficie minima appartengo-
„no ad un fascio isotermo."

Da ciò, ricordando che la rappresentazione sferica per le superficie minime è conforme segue che »

» Le immagini sferiche delle asintotiche » di una superficie minima sono esse pure i= » soterme. »

147. Le superficie minime sono comprese nel= la classe più estesa delle superficie a curvatu= ra media costante ed hanno con queste co= muni alcune proprietà, delle quali pas= siamo ora ad occuparci

Se si pone

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 2c \\ \chi &= \log(c^2 - \mathcal{G}) \end{aligned}\right\} \quad 19)$$

le equazioni (c_1) del § 127, nelle quali siano po= ste per ω_1 ed ω_2 le radici della equazione

$$\omega^2 - 2c\omega + \mathcal{G} = 0 \qquad 20)$$

supposto $\underline{c}$ costante, assumono la forma

$$\sum_{1p}^{2} \chi^{(p)} \lambda_p = -4(\gamma), \sum_{1p}^{2} \chi^{(p)} \overline{\lambda}_p = 4\gamma \qquad 21)$$

ed equivalgono quindi alle

$$4\overline{\varphi}_r = \chi_r, \qquad 22)$$

dalle quali risulta che

» Affinchè la forma fondamentale $\underline{\varphi}$ sia la e= » spressione del quadrato dell'elemento lineare » di una superficie a curvatura media costante è

„necessario a curvatura media costante ed egua-
„le.. e basta che sia soddisfatta la condizione

$$„ \quad \Delta_2 \log(c^2 - G) = 4G \quad " \qquad 23)$$

Che questa condizione sia necessaria si di-
mostra semplicemente derivando le (21) e ri-
cordando quanto fu dimostrato nel § 42. Se
poi la stessa condizione è soddisfatta, risul-
ta sempre dal § 42 che le (22) definiscono il
sistema coordinato di un fascio. Se λ_r è il si-
stema coordinato di una qualunque congruen-
za appartenente a questo fascio, risulteranno
soddisfatte le (21); il che val quanto dire che
saranno soddisfatte le (c_1) del § 127, in cui per
ω_1 ed ω_2 siano poste le radici della equazione
(20).

Se si osserva di più che dalle (22) segue che
il fascio, il cui sistema coordinato φ_r è defini-
to da esse, è isotermo, dalle considerazioni ora
svolte, oltre alla dimostrazione della secon-
da parte del teorema enunciato sopra, segue
ancora che

1° „ Se è verificata la condizione ammes-
„sa in quel teorema esiste una semplice in-
„finità di superficie a curvatura media costan-
„te ed eguale a c il cui quadrato dell'elemento

„lineare è espresso dalla forma fondamentale."

2°. „Che le linee di curvatura di queste su-„perficie costituiscono un fascio isotermo e „precisamente quello, il cui sistema coordi-„nato covariante ha gli elementi

$$\varphi_r = -\frac{1}{4}\frac{d \log(c^2 - G)}{dx_r} \,.\text{"}$$

Questi risultati possono anche enunciarsi nel modo seguente:

„Per ogni superficie a curvatura media „costante esiste una semplice infinità di su-„perficie ad essa applicabili senza alterazio-„ne delle curvature principali. Le linee di „curvatura di una qualunque di tali super-„ficie sono isoterme; e quelle di due su-„perficie distinte si incontrano sotto angolo „costante."

Osserviamo ancora che quando la condizione (7) sia soddisfatta noi possiamo (§70) con semplici quadrature determinare tutte le congruenze di linee, che appartengono al fascio φ_r e quindi ottenere (§127) le equazioni intrinseche di tutte le superficie, la cui curvatura media è eguale a $\frac{c}{2}$ e il [illegible] quadrato dell'elemento lineare è espresso dalla forma fondamentale. La determinazio-

ne di queste superficie dipende dunque da semplici quadrature.

Naturalmente tutti questi risultati si applicano direttamente alle superficie minime supponendo $c = 0$.

Le condizioni perchè la forma fondamentale rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie minima e quindi di una semplice infinità di tali superficie sono dunque

1° che l'invariante $\underline{\mathcal{G}}$ di Gauss ad essa relativo non sia positivo;

2° che si abbia

$$\Delta_2 \log(-\mathcal{G}) = 4\,\mathcal{G} .$$

148. Proponiamoci ora di riconoscere se tra le superficie, il cui elemento lineare elevato al quadrato è espresso dalla forma fondamentale φ_7 ve ne ha qualcuna che comprenda una semplice infinità di rette, cioè, come si dice rigata e nel caso affermativo, proponiamoci di determinare appunto tutte le superficie rigate, di cui si tratta. Poichè le rette, che giacciono sopra una superficie, sono evidentemente asintotiche, una superficie rigata dovrà avere le asintotiche reali

e quindi (§ 132) la sua curvatura totale dovrà essere nulla o negativa. Perchè la forma φ rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una superficie rigata, sarà dunque prima di tutto necessario che il suo invariante G di Gauss non sia positivo. Esclusto il caso già considerato delle superficie sviluppabili, potremo quindi supporre $G < 0$. Poichè per le asintotiche (§ 132) la curvatura normale è nulla e quindi la flessione coincide in valore assoluto colla curvatura tangenziale, le superficie rigate, il cui elemento lineare è espresso da $\sqrt{\varphi}$, saranno tutte e soltanto quelle, per le quali una delle congruenze di linee asintotiche è geodetica. Posto poi

$$4\nu = -\log(-G), \qquad 24)$$

risulta dalle equazioni (c_2) ed (i_2) del § 132 che tali superficie sono tutte e soltanto quelle, per le quali esiste una congruenza geodetica λ_r tale che si abbia

$$\sum_{1}^{2}{}_p\, \nu^{(p)} \lambda_p = (\gamma) \qquad 25)$$

e che, indicando con β l'integrale generale della equazione:

$$\sum_{1}^{2}{}_p\, \beta^{(p)} \lambda_p - \sum_{1}^{2}{}_p\, \alpha^{(p)} \bar{\lambda}_p + \beta(\gamma) = 0\,, \qquad 26)$$

essendo

$$\alpha = \sqrt{-G}\,, \qquad 27)$$

le equazioni intrinseche di tutte le superficie cercate sono:

$$\left.\begin{aligned}\xi_r &= \{\eta(\gamma) + \alpha\, \zeta\}\, \lambda_r \\ \eta_r &= \alpha\, \zeta\, \lambda_r + \{\beta\, \zeta - \alpha(\gamma)\}\, \bar{\lambda}_r \\ \zeta_r &= -\alpha\, \eta\, \lambda_r - (\beta\, \eta + \alpha\, \xi)\, \bar{\lambda}_r\end{aligned}\right\} \quad i)$$

$$y_r = \xi\, \lambda_r + \eta\, \bar{\lambda}_r . \qquad i_1)$$

Ponendo

$$\xi = \cos \vartheta , \quad \zeta = \eta \operatorname{tang} \psi \qquad 28),$$

le (i) assumono la forma

$$\psi_r = -\alpha\, \lambda_r - \beta\, \bar{\lambda}_r \qquad 29)$$

$$\vartheta_r = \{\alpha \operatorname{sen} \psi + (\gamma) \cos \psi\}\, \bar{\lambda}_r , \qquad 30)$$

nelle quali la indeterminata β rappresenta ancora l'integrale generale della (26). — Poichè questa ci dice soltanto (§ 42) che le ψ_r devono essere le derivate prime di una funzione ψ rispetto alle x_r, e le λ_r sono (§ 72) le derivate di una funzione $\underline{\lambda}$, che è un parametro delle linee $\bar{\lambda}_r$, le (29) integrate dànno

$$\psi = -\int \alpha\, d\lambda + v$$

indicando con $\underline{v}$ un parametro arbitrario delle linee λ_r. Essendo poi (§ 66)

$$\bar{\lambda}_r = \frac{1}{\Delta_1 v} \cdot v_r ,$$

le (30) assumono la forma

$$\vartheta_r = \mathcal{M} \cdot v_r ,$$

essendo $\underline{\mathcal{M}}$ una funzione arbitraria della sola $\underline{v}$ e ci dicono quindi che tale è pure ϑ; e quin-

di per le (i) che ζ_1, ζ_2 e ζ_3 sono esse pure funzioni qualunque di u purchè legate dalla relazione:

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = 1.$$

Si immagini ora di condurre per l'origine O degli assi y_1, y_2, y_3 le parallele alle generatrici della superficie rigata. Otterremo un cono di vertice O, che si chiama cono direttore di questa superficie, e nella intersezione di esso colla sfera di raggio 1 e di centro O una curva sferica, che si chiama indicatrice sferica delle sue generatrici. – E poichè $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sono le coordinate di un punto qualunque di questa indicatrice, i risultati stabiliti sopra trovano la loro interpretazione geometrica nel seguente teorema.

„ Una superficie rigata può deformarsi
„ senza alterazione del suo elemento lineare
„ in modo che il suo cono direttore assuma
„ una forma data ad arbitrio."

149. Ci rimane di determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè sulle superficie, che hanno per il quadrato del loro elemento lineare una espressione data φ, esista una congruenza geodetica λ_r, per cui sia soddisfatta la condizione (25); – o, in altri ter-

mini, perchè esista un fascio φ_r dotato di due congruenze ortogonali λ_r, $\bar{\lambda}_r$, di cui la prima sia geodetica, e la seconda abbia la curvatura geodetica data dalla (25). Perciò, come risulta dal § 43, è necessario e basta che sia soddisfatta la condizione

$$\sum_{1p}^{3}(\gamma)^{(p)}\lambda_p + (\gamma)^2 + G = 0,$$

la quale, sostituite a (γ) ed alle sue derivate le espressioni date dalle (25), assume la forma

$$\sum_{1pq}^{2}(\mathcal{N}_{pq} + \mathcal{N}_p \mathcal{N}_q)\lambda^{(p)}\lambda^{(q)} + G = 0 \qquad 31)$$

Da questa risulta prima di tutto che

„Non esistono superficie rigate gobbe a curvatura totale costante."

Si supponga ora G variabile e si indichi con k_r il sistema coordinato covariante delle traiettorie ortogonali delle linee di parametro G o $\mathcal{N}$, con ψ l'angolo, che le linee λ_r fanno colle k_r. Ciò equivale a porre (§ 66)

$$\mathcal{N}_r = \Delta_1 \mathcal{N}.\, k_r\,, \qquad 32)$$

$$\cos\psi = \sum_{1r}^{2}\lambda^{(r)}k_r\,, \quad \text{sen}\,\psi = \sum_{1r}^{2}\lambda^{(r)}\bar{k}_r$$

E poichè (§ 43) indicando con μ una indeterminata, valgono le

$$\frac{1}{\Delta_1 \mathcal{N}}\cdot\mathcal{N}_{rs} = \mu k_r k_s + g(k_r\bar{k}_s + \bar{k}_r k_s) + (g)\bar{k}_r\bar{k}_s\,, \qquad 33)$$

la (31) assumerà la forma

$$\frac{G}{\Delta_1 \mathcal{N}} + \frac{\mu + (g) + \Delta_1 \mathcal{N}}{2} + \frac{\mu - (g) + \Delta_1 \mathcal{N}}{2}\cos 2\psi + g\,\text{sen}\,2\psi = 0 \qquad 34)$$

Perchè questa sia identicamente soddisfatta, do

vrà dunque essere

$$2\mathcal{G} + (\mu + (g)) \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} + (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2 = 0$$

$$g = 0\ ;\ (g) = \mu + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}$$

Ne risultano le

$$(g) = -\frac{\mathcal{G}}{\underset{1}{\Delta} \mathcal{N}},\ -\mu = \frac{\mathcal{G}}{\underset{1}{\Delta} \mathcal{N}} + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}. \qquad 35)$$

Poichè le (14,) del § 43 danno le

$$\frac{d \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}}{dx_r} = \mu \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} . k_r$$

e dalle (27) ricaviamo le

$$\mathcal{G}_r = -4 \mathcal{G} \mathcal{N}_r\ ,$$

derivando la prima delle (35) si ottengono le

$$(g)_r = \left\{ 3\mathcal{G} - \left(\frac{\mathcal{G}}{\underset{1}{\Delta} \mathcal{N}}\right)^2 \right\} k_r\ ;$$

dalle quali e dalle (15) del § 43 segue $\mathcal{G} = 0$. — Vediamo così che le (34) non può mai essere identicamente soddisfatta.

Poichè la (25) equivale alla

$$(\gamma) = \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} \cos\varphi\ ,$$

possiamo altresì concludere che

„ Perchè una forma differenziale quadra-
„ tica positiva di 1ª classe, φ, rappresenti il qua-
„ drato dell'elemento lineare di una superfi-
„ cie rigata è necessario e basta

1° „ Che il suo invariante di Gauss non sia
„ costante.

2° „ Che posto

„ $$4\mathcal{N} = -\log(-\mathcal{G})$$

„ e indicando con ψ l'angolo, che le linee di
„ una congruenza λ_r fanno con quelle della
„ congruenza, il cui sistema coordinato co-
„ variante k_r è dato dalle (32), una alme-
„ no delle congruenze definite dalla equa-
„ zione (34) sia geodetica e tale che la curva-
„ tura geodetica delle sue traiettorie ortogo-
„ nali sia eguale a $\Delta_1 N \cos\psi$, essendo

$$4N = -\log(-G).$$

3° „ Riconosciuto che l'una o l'altra delle con-
„ gruenze λ_r definite dalla equazione (34) soddi-
„ sfa alle condizioni indicate, esiste un nu-
„ mero infinito di superficie rigate, per cui il
„ quadrato dell'elemento lineare è espresso
„ dalla forma data. Queste hanno per ge-
„ neratrici le linee della congruenza λ_r, e le
„ loro equazioni intrinseche sono date dalle
„ (i) ed (i_1), nelle quali per β si intenda posto
„ l'integrale generale della equazione (26)„

Vediamo dunque che le superficie rigate possono subire infinite deformazioni, per le quali il loro elemento lineare non si altera, e le loro generatrici seguitano a rimanere tali. Il Bonnet dimostrò che questo è il solo caso,

in cui una superficie possa deformarsi senza alterazione del suo elemento lineare e in guisa che le sue asintotiche non perdano tale carattere. Questo teorema scende immediatamente dalle equazioni (c_2) del § 132, dalle quali, data la congruenza asintotica λ_γ, risulta sempre determinata β, se non è $\gamma = 0$

150. Si abbia una superficie dotata della proprietà che una delle sue curvature principali sia costante. Se nelle (c_1) del § 127 si suppone ω_2 costante, ne risulta $\delta = 0$, nel qual caso è $\omega_1 = \omega_2$, ovvero $(\gamma) = 0$. Dunque, se la superficie, che consideriamo, non è sferica, essa è tale che le linee di curvatura corrispondenti alla curvatura principale ω_2 sono geodetiche. Queste sono necessariamente anche linee piane, poichè la torsione geodetica delle linee di curvatura è nulla, e quindi sono cerchi il cui raggio R è in valore assoluto eguale ad $\frac{1}{\omega_2}$. Una tale superficie può dunque considerarsi come generata dal movimento di una circonferenza di raggio R; e dicesi superficie canale. Nel muoversi della circonferenza il centro $\underline{c}$ descriverà una linea $\underline{l}$, che dicesi asse della superficie canale.

Relativamente a questa classe di superfi-cie, basterà il cenno che ne abbiamo ora dato.

Capitolo Quinto

Evolute e superficie di Weingarten

Forme fondamentali per le due falde dell'evoluta. – Congruenze ortogonali e coniugate e linee di curvatura sull'evoluta – Condizioni perchè la rappresentazione delle due falde dell'evoluta l'una sull'altra risulti conforme. – Superficie W e loro proprietà caratteristiche – Teorema di Weingarten. – Evolventi e loro forme fondamentali. – Teorema reciproco di quello di Weingarten.

151. Per le linee di curvatura e per le curvature principali di una superficie qualunque S manterremo le notazioni del § 123. Di più chiameremo rispettivamente prime e seconde linee di curvatura le linee λ_r e $\bar{\lambda}_r$; e posto

$$r_1 = -\frac{1}{\omega_1}, \quad r_2 = -\frac{1}{\omega_2},$$

r_1 ed r_2 saranno il primo ed il secondo raggio principale di curvatura.

Si chiama evoluta della superficie S il luogo degli estremi delle normali condotti pei punti di S ed eguali all'uno od all'altro dei due rag-

gi principali di curvatura. Si hanno quindi due evolute o, se si vuole, due falde S_1 ed S_2 di una stessa evoluta corrispondenti alle prime ed alle seconde linee di curvatura, e che si diranno per ciò prima e seconda falda dell'evoluta. Per ogni punto P della superficie S, che dicesi evolvente, chiameremo corrispondente sulla prima o seconda falda dell'evoluta ed indicheremo rispettivamente con P_1 o con P_2 il punto rispettivamente di S_1 e di S_2, che si trova sulla normale all'evolvente nel punto P. — Si ha così una rappresentazione univoca delle tre superficie S, S_1 ed S_2 l'una sull'altra.

Per la superficie S conserviamo le notazioni di cui si è fatto uso continuo, ed indichiamo con $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ le coordinate del punto P_1 di S_1. Avremo

$$\mathcal{Y}_h = y_h - r_1 J_h$$

e però

$$\mathcal{Y}_{h|p} = y_{h|p} - r_1 J_{k|p} - J_h r_{1|p}, \qquad 1)$$

e

$$\mathcal{A}_{pq} = a_{pq} + 2 r_1 b_{pq} + r_1^2 c_{pq} + r_{1|p} r_{1|q} \qquad 2)$$

saranno i coefficienti della prima forma fondamentale relativa ad S_1.

Avendosi (§ 124)

$$b_{pq} = -\frac{1}{r_1} \lambda_p \lambda_q - \frac{1}{r_2} \bar{\lambda}_p \bar{\lambda}_q, \qquad 3)$$

si avrà altresì

$$\sum_{1q}^{2} b_{pq}\,\lambda^{(q)} = -\frac{1}{r_1}\,\lambda_p$$

e per le (1) del § 135

$$\sum_{1q}^{2} c_{pq}\,\lambda^{(q)} = \frac{1}{r_1^2}\,\lambda_p\,.$$

Dalle (2) ricaviamo poi

$$\sum_{pq} A_{pq}\,\lambda^{(p)}\lambda^{(q)} = \left(\frac{d r_1}{ds}\right)^2,$$

dove con ds si indica l'elemento delle linee λ_r, e quindi

$$d r_1^2 = \sum_{pq} A_{pq}\, dx_p\, dx_q\ ;$$

ovvero

$$ds_1 = dr_1\ ,$$

indicando con ds_1 l'elemento delle immagini sopra S_1 delle prime linee di curvatura di S — Se poi si denota con $\lambda_1^{(p)}$ il sistema coordinato controvariante di tali immagini sarà

$$\lambda_1^{(p)} = \frac{dx_p}{dr_1} = \frac{ds}{dr_1}\,\lambda^{(p)}\ ; \qquad 4)$$

e

$$\lambda_{1|p} = \sum_q A_{pq}\,\lambda_1^{(q)} = \frac{ds}{dr_1}\sum_q A_{pq}\,\lambda^{(q)} = r_{1|p}$$

sarà il loro sistema coordinato covariante. — Questo risultando delle derivate prime di r_1 rispetto alle x_p, ne concludiamo (§ 72) che

„ Sopra una qualunque delle falde dell'evoluta le congruenze, che risultano delle immagini delle corrispondenti linee di curvatura sono geodetiche. Il raggio principale di curvatura, che corrisponde a quelle linee, è

il parametro delle traiettorie ortogonali alle „geodetiche stesse."

Ricorrendo alle (1) del § 135 le (1) si possono mettere sotto la forma

$$\mathcal{A}_{pq} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}(a_{pq} + r_1 b_{pq}) + r_{1|p}\, r_{1|q}$$

od anche, per le (3),

$$\mathcal{A}_{pq} = \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right)^2 \bar{\lambda}_p \bar{\lambda}_q + r_{1|p}\, r_{1|q} \qquad 2_1)$$

Se ne deduce prima di tutto che le due falde dell'evoluta, come risulta chiaro geometricamente, si riducono ad un punto per la sfera; e che una di esse si riduce ad una linea per le superficie canali. — Per conseguenza dalle nostre considerazioni resterà escluso il caso della sfera, e, quanto alle superficie canali, esse riguarderanno soltanto la falda dell'evoluta, che non degenera in una linea. — Escluderemo pure le superficie sviluppabili, per le quali una delle curvature principali risulta infinita.

Indicando con $\mathcal{A}$ il discriminante della prima forma fondamentale relativa ad S_1 dalle (2₁) segue ancora

$$\mathcal{A} = a\left(\frac{r_1 - r_2}{r_2}\right)^2 \left(\frac{d r_1}{d s}\right)^2 \qquad 5)$$

Sia $\bar{r}_{1|p}$ il sistema canonico ortogonale al sistema $r_{1|p}$ rispetto alla forma

$$\varphi_1 = \sum_{1}^{2}{}_{rs} A_{rs}\, dx_r\, dx_s .$$

Avremo (§ 40)

$$\overline{r}_{1|p} = (-1)^{p+1}\sqrt{A}\ r_1^{(p+1)}$$

ovvero, per le (4) e (5), posto

$$\mu = \left|\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right|$$

$$\overline{r}_{1|p} = \mu\ \overline{\lambda}_p$$

Calcoliamo i simboli di Christoffel relativi alla forma φ_1. Risulteranno le

$$A_{pq,t} = \frac{1}{2}\mu^2\left\{\overline{\lambda}_p(\overline{\lambda}_{tq}-\overline{\lambda}_{qt})+\overline{\lambda}_q(\overline{\lambda}_{tp}-\overline{\lambda}_{pt})+\overline{\lambda}_t\left(\frac{d\lambda_p}{dx_q}+\frac{d\lambda_q}{dx_p}\right)\right\}$$
$$+\mu(\mu_q\overline{\lambda}_p+\mu_p\overline{\lambda}_q)\lambda_t-\mu\mu_t\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q+r_t\frac{d^2r}{dx_p dx_q},$$

le quali moltiplicate per $\lambda_1^{(t)}$ e sommate rispetto a t, ricordando le (4) e ricordando ancora che il sistema $\lambda_1^{(t)}$ è reciproco al sistema r_t rispetto alla forma φ_1, dànno le

$$r_{1|pq} = \frac{1}{\frac{dr_1}{ds}}\left\{(\gamma)+\frac{d\log\mu}{ds}\right\}\overline{r}_{1|p}\ \overline{r}_{1|q}\ ;$$

in cui con $r_{1|pq}$ indichiamo gli elementi del secondo sistema derivato covariantemente da r_1 secondo φ_1. — Queste formole mentre ci dicono ancora che la congruenza $r_{1|p}$ è geodetica sulla superficie S_1, indicando con γ_1 la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali, ci danno per questa la espressione

$$\gamma_1 = \frac{1}{\frac{dr_1}{ds}}\left\{(\gamma)+\frac{d\log\mu}{ds}\right\}$$

Avendosi poi dalle (c_1) del § 127

$$(\gamma) = \frac{r_1}{r_2(r_1 - r_2)} \frac{dr_2}{ds} = - \frac{d \log \mu}{d r_2} \frac{dr_2}{ds}$$

ed essendo

$$\frac{d \log \mu}{ds} = \frac{d \log \mu}{d r_1} \frac{dr_1}{ds} + \frac{d \log \mu}{d r_2} \cdot \frac{dr_2}{ds} ,$$

risulta ancora

$$\gamma_1 = \frac{d \log \mu}{d r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2} . \qquad 6)$$

Indicando con γ_2 la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle linee di parametro r_2, sulla seconda falda della evoluta, si avrà dunque

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0 .$$

Dalle (1) combinate colle (i_1) ed (i') del § 127 ricaviamo ancora le

$$\sum_1^3 {}_h \zeta_h \, y_{h|p} = 0 ,$$

le quali ci dicono che

„ La normale ad una falda della evoluta „ e la tangente alla corrispondente linea di curvatura dell'evolvente nei punti corrispondenti sono parallele."

152. Se indichiamo con $\mathfrak{B}_{pq}$ i coefficienti della seconda forma fondamentale relativa ad S_1, abbiamo (§ 118)

$$\mathfrak{B}_{pq} = - \sum_1^3 {}_h \, y_{h|p} \, \zeta_{h|q}$$

ovvero, per le (1) e per le (i_1) del § 127,

$$\mathfrak{B}_{pq} = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \bar{\lambda}_q \varphi_p - \frac{1}{r_1} \lambda_p \, r_{1|q} . \qquad 7)$$

Da queste ricaviamo prima di tutto la

$$\sum_{pq} \mathfrak{B}_{pq} \, \bar{\lambda}^{(p)} \lambda^{(q)} = 0 ,$$

la quale, ricordando le (4) e le analoghe relative al sistema coordinato controvariante della congruenza $\overline{\lambda}^{(r)}$ sulla superficie S e quello della sua immagine sopra S_1 ci dice che

„ Sopra una falda qualunque dell'evoluta, „ le congruenze corrispondenti a quelle delle „ linee di curvatura della evolvente sono coniugate."

Dalle (7), avendo sempre presenti le (i_1) del § 127, ricaviamo ancora le

$$\sum_{pq} \mathcal{B}_{pq} \lambda^{(p)}\lambda^{(q)} = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{ds}$$

$$\sum_{pq} \mathcal{B}_{pq} \overline{\lambda}^{(p)}\overline{\lambda}^{(q)} = \frac{r_1}{r_2^2}\frac{dr_2}{ds}$$

Valgono dunque le

$$\mathcal{B}_{pq} = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{ds}\lambda_p\lambda_q + \frac{r_1}{r_2^2}\frac{dr_2}{ds}\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q \quad ; \quad 7_1)$$

e pel discriminante $\underline{\mathcal{B}}$ della seconda forma fondamentale relativa ad S_1 si ha la espressione

$$\mathcal{B} = -\frac{a}{r_2^2}\frac{dr_1}{ds}\frac{dr_2}{ds} \;;$$

e quindi per la curvatura totale G_1 della superficie S_1 la

$$G_1 = -\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\frac{dr_2}{ds}\cdot\frac{dr_1}{ds}. \qquad 8)$$

Se poniamo per brevità,

$$\rho_1 = \frac{r_2-r_1}{r_2}, \alpha_1 = \sum_p r_1^{(p)}\lambda_p, \beta_1 = \sum_p r_1^{(p)}\overline{\lambda}_p, \alpha_2 = \sum_p r_2^{(p)}\lambda_p, \beta_2 = \sum_p r_2^{(p)}\overline{\lambda}_p,$$

le (2_1), ci danno per le A_{pq} le espressioni

$$A_{pq} = \alpha_1^2\lambda_p\lambda_q + \alpha_1\beta_1(\lambda_p\overline{\lambda}_q + \overline{\lambda}_p\lambda_q) + (\rho_1^2+\beta_1^2)\,\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q \cdot \quad 9)$$

Se quindi $\mu^{(p)}$ e $\nu^{(p)}$ sono i sistemi coordinati controvarianti di due congruenze di linee tracciate sulla superficie S e indichiamo con η e ϑ gli angoli, che esse rispettivamente fanno colle linee λ_{r}, ricordando le (7_1), troviamo (§ 65 e § 131) che le condizioni, perchè le loro immagini siano ortogonali, ovvero coniugate sulla superficie S_1 sono date rispettivamente dalle equazioni

$$\alpha_1(\alpha_1 \cos\eta + \beta_1 \operatorname{sen}\eta)\cos\vartheta + \left\{\rho_1^2 \operatorname{sen}\eta + \beta_1(\alpha_1 \cos\eta + \beta_1 \operatorname{sen}\eta)\right\}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \quad 10)$$

$$r_2^2 \alpha_1 \cos\eta \cos\vartheta = r_1^2 \alpha_2 \operatorname{sen}\eta \operatorname{sen}\vartheta. \quad 11)$$

La equazione che esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le immagini delle linee $\mu^{(p)}$ siano linee di curvatura per la superficie S_1 si ottiene eliminando ϑ tra le equazioni testè stabilite ed è quindi rappresentata dalla equazione

$$\beta_1(\alpha_1 r_2^2 - \alpha_2 r_1^2)\cos 2\eta + (\alpha_1 \alpha_2 r_1^2 + (r_1 - r_2)^2 + \beta_1^2 r_2^2)\operatorname{sen} 2\eta + \beta_1(\alpha_1 r_2^2 + \alpha_2 r_1^2) = 0 \quad 12)$$

Analogamente la equazione delle congruenze della superficie S, che sulla superficie S_2 hanno per immagini le linee di curvatura di questa, è

$$\alpha_2(\beta_1 r_2^2 - \beta_1 r_1^2)\cos 2\eta + (\beta_1 \beta_2 r_2^2 + (r_1 - r_2)^2 + \alpha_2^2 r_1^2)\operatorname{sen} 2\eta + \alpha_2(\beta_1 r_2^2 + \beta_2 r_1^2) = 0. \quad 12')$$

Perchè poi le linee di curvatura sulle due falde dell'evoluta si corrispondano sarà necessario e sufficiente che le equazioni (12) e (12') coincidano; cioè, come si riconosce facilmente, che sia

„ e indicando con ψ l'angolo, che le linee di
„ una congruenza λ_r fanno con quelle della
„ congruenza, il cui sistema coordinato co-
„ variante k_r è dato dalle (32), una alme-
„ no delle congruenze definite dalla equa-
„ zione (34) sia geodetica e tale che la curva-
„ tura geodetica delle sue traiettorie ortogo-
„ nali sia eguale a $\Delta_1 N \cos\psi$, essendo

„ $$4N = -\log(-G).$$

3.° „ Riconosciuto che l'una o l'altra delle con-
„ gruenze λ_r definite dalla equazione (34) soddi-
„ sfa alle condizioni indicate, esiste un nu-
„ mero infinito di superficie rigate, per cui il
„ quadrato dell'elemento lineare è espresso
„ dalla forma data. Queste hanno per ge-
„ neratrici le linee della congruenza λ_r, e le
„ loro equazioni intrinseche sono date dalle
„ (i) ed (i₁), nelle quali per β si intenda posto
„ l'integrale generale della equazione (26)„.

Vediamo dunque che le superficie rigate possono subire infinite deformazioni, per le quali il loro elemento lineare non si altera, e le loro generatrici seguitano a rimanere tali. Il Bonnet dimostrò che questo è il solo caso,

in cui una superficie possa deformarsi senza alterazione del suo elemento lineare e in guisa che le sue asintotiche non perdano tale carattere. Questo teorema scende immediatamente dalle equazioni (c_2) del § 132, dalle quali, data la congruenza asintotica λ_γ, risulta sempre determinata β, se non è $\gamma = 0$

150. Si abbia una superficie dotata della proprietà che una delle sue curvature principali sia costante. Se nelle (c_1) del § 127 si suppone ω_2 costante, ne risulta o $\delta = 0$, nel qual caso è $\omega_1 = \omega_2$, ovvero $(\gamma) = 0$. — Dunque, se la superficie, che consideriamo, non è sferica, essa è tale che le linee di curvatura corrispondenti alla curvatura principale ω_2 sono geodetiche. Queste sono necessariamente anche linee piane, poichè la torsione geodetica delle linee di curvatura è nulla, e quindi sono cerchi il cui raggio R è in valore assoluto eguale ad $\frac{1}{\omega_2}$. Una tale superficie può dunque considerarsi come generata dal movimento di una circonferenza di raggio R; e dicesi superficie canale. — Nel muoversi della circonferenza il centro $\underline{C}$ descriverà una linea $\underline{l}$, che dicesi asse della superficie canale.

Relativamente a questa classe di superficie, basterà il cenno che ne abbiamo ora dato.

Capitolo Quinto

Evolute e superficie di Weingarten

Forme fondamentali per le due falde dell'evoluta. — Congruenze ortogonali e coniugate e linee di curvatura sull'evoluta — Condizioni perchè la rappresentazione delle due falde dell'evoluta l'una sull'altra risulti conforme. — Superficie W e loro proprietà caratteristiche — Teorema di Weingarten. — Evolventi e loro forme fondamentali. — Teorema reciproco di quello di Weingarten.

151. Per le linee di curvatura e per le curvature principali di una superficie qualunque S manterremo le notazioni del § 123. Di più chiameremo rispettivamente prime e seconde linee di curvatura le linee λ_r e $\bar{\lambda}_r$; e posto

$$r_1 = -\frac{1}{\omega_1}, \quad r_2 = -\frac{1}{\omega_2},$$

r_1 ed r_2 saranno il primo ed il secondo raggio principale di curvatura.

Si chiama evoluta della superficie S il luogo degli estremi delle normali condotti pei punti di S ed eguali all'uno od all'altro dei due rag-

gi principali di curvatura. Si hanno quindi due evolute o, se si vuole, due falde S_1 ed S_2 di una stessa evoluta corrispondenti alle prime ed alle seconde linee di curvatura, e che si diranno per ciò prima e seconda falda dell'evoluta. Per ogni punto P della superficie S, che dicesi evolvente, chiameremo corrispondente sulla prima o seconda falda dell'evoluta ed indicheremo rispettivamente con P_1 o con P_2 il punto rispettivamente di S_1 e di S_2, che si trova sulla normale all'evolvente nel punto P. — Si ha così una rappresentazione univoca delle tre superficie S, S_1 ed S_2 l'una sull'altra.

Per la superficie S conserviamo le notazioni di cui si è fatto uso continuo, ed indichiamo con $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ le coordinate del punto P_1 di S_1. Avremo

$$\mathcal{Y}_h = y_h - r_1 \mathcal{J}_h$$

e però

$$\mathcal{Y}_{h|p} = y_{h|p} - r_1 \mathcal{J}_{h|p} - \mathcal{J}_h r_{1|p}\,, \qquad 1)$$

e

$$\mathcal{A}_{pq} = a_{pq} + 2 r_1 b_{pq} + r_1^2 c_{pq} + r_{1|p} r_{1|q} \qquad 2)$$

saranno i coefficienti della prima forma fondamentale relativa ad S_1.

Avendosi (§ 124)

$$b_{pq} = -\frac{1}{r_1}\lambda_p\lambda_q - \frac{1}{r_2}\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q\,, \qquad 3)$$

si avrà altresì

$$\sum_{1q}^{2} b_{pq} \lambda^{(q)} = -\frac{1}{r_1} \lambda_p$$

e per le (1) del § 135

$$\sum_{1q}^{2} c_{pq} \lambda^{(q)} = \frac{1}{r_1^2} \lambda_p .$$

Dalle (2) ricaviamo poi

$$\sum_{pq} A_{pq} \lambda^{(p)} \lambda^{(q)} = \left(\frac{d r_1}{ds}\right)^2 ,$$

dove con ds si indica l'elemento delle linee λ_r, e quindi

$$d r_1^2 = \sum_{pq} A_{pq} dx_p dx_q ;$$

ovvero

$$ds_1 = dr_1 ,$$

indicando con ds_1 l'elemento delle immagini sopra S_1 delle prime linee di curvatura di S — Se poi si denota con $\lambda_1^{(p)}$ il sistema coordinato controvariante di tali immagini sarà

$$\lambda_1^{(p)} = \frac{dx_p}{dr_1} = \frac{ds}{dr_1} \lambda^{(p)} ; \qquad 4)$$

e

$$\lambda_{1|p} = \sum_q A_{pq} \lambda_1^{(q)} = \frac{ds}{dr_1} \sum_q A_{pq} \lambda^{(q)} = r_{1|p}$$

sarà il loro sistema coordinato covariante. — Questo risultando delle derivate prime di r_1 rispetto alle x_p, ne concludiamo (§ 72) che

„ Sopra una qualunque delle falde dell'e„voluta le congruenze, che risultano delle im„magini delle corrispondenti linee di curva„tura sono geodetiche. Il raggio principale di „curvatura, che corrisponde a quelle linee, è

„il parametro delle traiettorie ortogonali alle
„ geodetiche stesse.”

Ricorrendo alle (1) del § 135 le (1) si possono
mettere sotto la forma

$$b_{pq} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}(a_{pq} + r_1 b_{pq}) + r_{1|p} r_{1|q}$$

od anche, per le (3),

$$b_{pq} = \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right)^2 \bar{\lambda}_p \bar{\lambda}_q + r_{1|p} r_{1|q}. \qquad 2_1)$$

Se ne deduce prima di tutto che le due falde
dell'evoluta, come risulta chiaro geometrica-
mente, si riducono ad un punto per la sfera; e
che una di esse si riduce ad una linea per
le superficie canali. — Per conseguenza dalle
nostre considerazioni resterà escluso il caso
della sfera, e, quanto alle superficie canali, es-
se riguarderanno soltanto la falda dell'evolu-
ta, che non degenera in una linea. — Esclude-
remo pure le superficie sviluppabili, per le qua-
li una delle curvature principali risulta infi-
nita.

Indicando con b il discriminante della pri-
ma forma fondamentale relativa ad S, dal-
le (2_1) segue ancora

$$b = a\left(\frac{r_1 - r_2}{r_2}\right)^2 \left(\frac{d r_1}{ds}\right)^2 \qquad 5)$$

Sia $\bar{r}_{1|p}$ il sistema coniugato ortogonale al siste-
ma $r_{1|p}$ rispetto alla forma

$$\varphi_1 = \sum_{1}^{2}{}_{rs} A_{rs}\, dx_r\, dx_s \,.$$

Avremo (§ 40)

$$\overline{r}_{1|p} = (-1)^{p+1}\sqrt{A}\;\; r_1^{(p+1)}$$

ovvero, per le (4) e (5), posto

$$\mu = \left|\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right|$$

$$\overline{r}_{1|p} = \mu\;\; \overline{\lambda}_p$$

Calcoliamo i simboli di Christoffel relativi alla forma φ_1. Risulteranno le

$$A_{pq,t} = \frac{1}{2}\mu^2\left\{\overline{\lambda}_p\left(\overline{\lambda}_{tq} - \overline{\lambda}_{qt}\right) + \overline{\lambda}_q\left(\overline{\lambda}_{tp} - \overline{\lambda}_{pt}\right) + \overline{\lambda}_t\left(\frac{d\lambda_p}{dx_q} + \frac{d\lambda_q}{dx_p}\right)\right\}$$
$$+ \mu\left(\mu_q\overline{\lambda}_p + \mu_p\overline{\lambda}_q\right)\lambda_t - \mu\,\mu_t\,\overline{\lambda}_p\,\overline{\lambda}_q + r_t\frac{d^2 r}{dx_p\,dx_q}\,,$$

le quali moltiplicate per $\lambda_1^{(t)}$ e sommate rispetto a $\underline{t}$, ricordando le (4) e ricordando ancora che il sistema $\lambda_1^{(t)}$ è reciproco al sistema r_t rispetto alla forma φ_1, dànno le

$$r_{1|pq} = \frac{1}{\frac{dr_1}{ds}}\left\{(\gamma) + \frac{d\log\mu}{ds}\right\}\overline{r}_{1|p}\;\overline{r}_{1|q}\;\; ;$$

in cui con $r_{1|pq}$ indichiamo gli elementi del secondo sistema derivato covariantemente da r_1 secondo φ_1. – Queste formole mentre ci dicono ancora che la congruenza $r_{1|p}$ è geodetica sulla superficie S_1, indicando con γ_1 la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali, ci danno per questa la espressione

$$\gamma_1 = \frac{1}{\frac{dr_1}{ds}}\left\{(\gamma) + \frac{d\log\mu}{ds}\right\}$$

Avendosi poi dalle (c_1) del § 127

$$(\gamma) = \frac{r_1}{r_2(r_1 - r_2)} \frac{dr_2}{ds} = -\frac{d\log\mu}{dr_2}\frac{dr_2}{ds}$$

ed essendo
$$\frac{d\log\mu}{ds} = \frac{d\log\mu}{dr_1}\frac{dr_1}{ds} + \frac{d\log\mu}{dr_2}\cdot\frac{dr_2}{ds},$$

risulta ancora
$$\gamma_1 = \frac{d\log\mu}{dr_1} = \frac{1}{r_1 - r_2}. \qquad 6)$$

Indicando con γ_2 la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali alle linee di parametro r_2, sulla seconda falda della evoluta, si avrà dunque

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0.$$

Dalle (1) combinate colle (i_1) ed (i') del § 127 ricaviamo ancora le

$$\sum_1^3 {}_h \zeta_h \, y_{h|p} = 0,$$

le quali ci dicono che

„ La normale ad una falda della evoluta
„ e la tangente alla corrispondente linea di cur-
„ vatura dell'evolvente nei punti corrisponden-
„ ti sono parallele."

152. Se indichiamo con β_{pq} i coefficienti della seconda forma fondamentale relativa ad S_1, abbiamo (§ 118)

$$\beta_{pq} = -\sum_1^3 {}_h \, y_{h|p} \zeta_{h|q}$$

ovvero, per le (1) e per le (i_1) del § 127,

$$\beta_{pq} = \frac{r_1 - r_2}{r_2} \bar{\lambda}_q \varphi_p - \frac{1}{r_1} \lambda_p \, r_{1|q}. \qquad 7)$$

Da queste ricaviamo prima di tutto la

$$\sum_{pq} \beta_{pq} \bar{\lambda}^{(p)} \lambda^{(q)} = 0,$$

la quale, ricordando le (4) e le analoghe relativi tra il sistema coordinato controvariante della congruenza $\overline{\lambda}^{(r)}$ sulla superficie S e quello della sua immagine sopra S_1 ci dice che

„ Sopra una falda qualunque dell'evoluta, „ le congruenze corrispondenti a quelle delle „ linee di curvatura della evolvente sono coniugate."

Dalle (7), avendo sempre presenti le (i_1) del § 127, ricaviamo ancora le

$$\sum_{pq} \mathcal{B}_{pq} \lambda^{(p)}\lambda^{(q)} = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{ds}$$

$$\sum_{pq} \mathcal{B}_{pq} \overline{\lambda}^{(p)}\overline{\lambda}^{(q)} = \frac{r_1}{r_2^2}\frac{dr_2}{ds}$$

Valgono dunque le

$$\mathcal{B}_{pq} = -\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{ds}\lambda_p\lambda_q + \frac{r_1}{r_2^2}\frac{dr_2}{ds}\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q \quad ; \quad 7_1)$$

e pel discriminante $\underline{\mathcal{B}}$ della seconda forma fondamentale relativa ad S_1 si ha la espressione

$$\mathcal{B} = -\frac{a}{r_2^2}\frac{dr_1}{ds}\frac{dr_2}{ds} \;;$$

e quindi per la curvatura totale G_1 della superficie S_1 la

$$G_1 = -\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\frac{dr_2}{ds}\cdot\frac{dr_1}{ds}. \qquad 8)$$

Se poniamo per brevità,

$$\rho_1 = \frac{r_2-r_1}{r_2}, \alpha_1 = \sum_p r_1^{(p)}\lambda_p, \beta_1 = \sum_p r_1^{(p)}\overline{\lambda}_p, \alpha_2 = \sum_p r_2^{(p)}\lambda_p, \beta_2 = \sum_p r_2^{(p)}\overline{\lambda}_p,$$

le (2_1), ci danno per le A_{pq} le espressioni

$$A_{pq} = \alpha_1^2\lambda_p\lambda_q + \alpha_1\beta_1(\lambda_p\overline{\lambda}_q + \overline{\lambda}_p\lambda_q) + (\rho_1^2+\beta_1^2)\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q \cdot \quad 9)$$

Se quindi $\mu^{(p)}$ e $\nu^{(p)}$ sono i sistemi coordinati contrevarianti di due congruenze di linee tracciate sulla superficie S e indichiamo con η e ϑ gli angoli, che esse rispettivamente fanno colle linee λ_r, ricordando le (7_1), troviamo (§ 65 e § 131) che le condizioni, perchè le loro immagini siano ortogonali, ovvero coniugate sulla superficie S_1 sono date rispettivamente dalle equazioni

$$\alpha_1(\alpha_1 \cos\eta + \beta_1 \operatorname{sen}\eta)\cos\vartheta + \left\{\rho_1^2 \operatorname{sen}\eta + \beta_1(\alpha_1 \cos\eta + \beta_1 \operatorname{sen}\eta)\right\}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \qquad 10)$$

$$r_2^2 \alpha_1 \cos\eta \cos\vartheta = r_1^2 \alpha_2 \operatorname{sen}\eta \operatorname{sen}\vartheta. \qquad 11)$$

La equazione che esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le immagini delle linee $\mu^{(p)}$ siano linee di curvatura per la superficie S_1 si ottiene eliminando ϑ tra le equazioni stesse stabilite ed è quindi rappresentata dalla equazione

$$\beta_1(\alpha_1 r_2^2 - \alpha_2 r_1^2)\cos 2\eta + (\alpha_1\alpha_2 r_1^2 + (r_1 - r_2)^2 + \beta_1^2 r_2^2)\operatorname{sen} 2\eta + \beta_1(\alpha_1 r_2^2 + \alpha_2 r_1^2) = 0 \qquad 12)$$

Analogamente la equazione delle congruenze della superficie S, che sulla superficie S_2 hanno per immagini le linee di curvatura di questa, è

$$\alpha_2(\beta_1 r_2^2 - \beta_1 r_1^2)\cos 2\eta + (\beta_1\beta_2 r_2^2 + (r_1 - r_2)^2 + \alpha_2^2 r_1^2)\operatorname{sen} 2\eta + \alpha_2(\beta_1 r_2^2 + \beta_2 r_1^2) = 0. \qquad 12')$$

Perchè poi le linee di curvatura sulle due falde dell'evoluta si corrispondano sarà necessario e sufficiente che le equazioni (12) e (12') coincidano; cioè, come si riconosce facilmente, che sia

$$\alpha_1 = \alpha_2\ ,\ \beta_1 = \beta_2\ ,$$

ovvero, indicando con $\underline{c}$ una costante,

$$r_1 - r_2 = c\ .$$

Si ha così il seguente teorema dovuto a Ribaucour:

„ Perchè sulle due falde dell'evoluta le li„nee di curvatura si corrispondano è neces„sario e basta che sia costante la differenza „dei raggi principali di curvatura della evol„vente."

La (8) poi ci dice che in questo caso le due falde dell'evoluta hanno la stessa curvatura costante negativa $-\frac{1}{c^2}$.

Se con α_{pq} si denotano i coefficienti della prima forma fondamentale relativa ad S_2, posto

$$\rho_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_1}\ ,$$

assieme alle (9) si hanno le

$$\alpha_{pq} = (\alpha_2^2 + \rho_2^2)\,\lambda_p\,\lambda_q + \alpha_2\,\beta_2\,(\lambda_p\,\overline{\lambda}_q + \overline{\lambda}_p\,\lambda_q) + \beta_2^2\,\overline{\lambda}_p\,\overline{\lambda}_q\ .$$

Perchè dunque la corrispondenza tra i punti di S_1 ed S_2 sia tale, che la rappresentazione per essa determinata di una superficie sull'altra risulti conforme dovrà aversi (§. 94)

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2 + \rho_2^2} = \frac{\alpha_1\,\beta_1}{\alpha_2\,\beta_2} = \frac{\rho_1^2 + \beta_1^2}{\beta_2^2}\ ;$$

cioè

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1) &= \beta_1\,\rho_2^2 \\ \beta_1\,(\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1) &= \alpha_2\,\rho_1^2 \end{aligned}\right\}\quad 13)$$

La ipotesi $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, per le equazioni (c_1) del § 127 porta come conseguenza le

$$\gamma = (\gamma) = 0 ,$$

le quali ci dicono (§ 83) che la evolvente è una superficie sviluppabile e però deve escludersi. Le (43) equivalgono allora alle

$$\frac{\beta_1}{\alpha_2} = \pm \frac{r_1}{r_2}$$

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \pm \rho (r_1 - r_2)^2 ,$$

che esprimono le condizioni cercate.

153. Come la (11) per la falda S_1, così la

$$r_2^2 \beta_1 \cos \eta \cos \vartheta = r_1^2 \beta_2 \operatorname{sen} \eta \operatorname{sen} \vartheta$$

per la (S_2) rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè le immagini delle linee $\mu^{(p)}$ e $\nu^{(p)}$ siano coniugate. La equazione

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0$$

esprime dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè le copie di congruenze coniugate sulle due falde dell'evoluta si corrispondano. Essa equivale all'annullarsi del determinante funzionale

$$\frac{d (r_1 \; r_2)}{d (x_1 \; x_2)}$$

e però abbiamo il teorema:

„ Perchè sulle due falde dell'evoluta le copie „ di congruenze coniugate si corrispondano è necessario e basta che i raggi principali di cur-

„vatura della evolvente siano legate da una rela-
„zione della forma

$$f(r_1\, r_2) = 0 \,.\text{"}$$

Le superficie dotate di questa proprietà sono state specialmente studiate dal Weingarten e sogliono designarsi col nome di superficie W. – Alla loro classe appartengono, per esempio, le superficie a curvatura totale o media costante; e quelle, alle quali si riferisce il teorema di Ribaucour dimostrato nel § 142.

Dedurremo ora dalle formole generali stabilite nei paragrafi precedenti le altre proprietà più notevoli delle superficie W. – Prima di tutto la (9) assume in questo caso la forma

$$G_1 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\,\frac{dr_2}{dr_1}\,;$$

e da questa e dalla espressione analoga per la curvatura totale G_2 della seconda falda dell'evoluta si trae la

$$G_1\, G_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4}$$

Il teorema espresso da questa formola è dovuto ad Halphen, e ne segue come corollario

„ Per ogni superficie W le curvature totali
„ delle due falde dell'evoluta hanno segni eguali„

Per le superficie W la formola (6) ci dà

$$\gamma_1 = \Psi(r_1),$$

con Ψ indicando una funzione qualunque della sola r_1. Ne seguono le

$$\gamma_{1|p} = \frac{d\Psi}{d r_1} r_{1|p},$$

da cui

$$\sum_{1}^{2}{}_p \gamma_{1|p} \overline{r}_1^{(p)} = 0.$$

Da questa e dall'essere le linee $r_{1|p}$ geodetiche sulla superficie S_1 risulta (§92) che il fascio, a cui queste linee appartengono è isotermo e quindi (§144) che la superficie S_1 è applicabile sopra una superficie di rotazione. Abbiamo dunque il seguente teorema noto sotto il nome di teorema di Weingarten.

„ Le evolute delle superficie W sono applicabili sopra superficie di rotazione."

Dimostriamo ancora che

„ Sulle superficie W le equazioni delle linee di curvatura si integrano con semplici quadrature."

Indicando con u un parametro qualunque delle linee di curvatura $\overline{\lambda}_r$, con m una indeterminata avremo

$$u_r = m \lambda_r. \qquad 14)$$

Avremo dunque altresì

$$\overline{u}_r = m \overline{\lambda}_r,$$

e derivando covariantemente secondo la prima forma fondamentale relativa alla superficie S

$$\bar{u}_{rs} = m_s \bar{\lambda}_r - m \lambda_r \varphi_s$$

I fattori integranti $\underline{m}$ si hanno dunque (§ 42) integrando la equazione

$$\frac{\delta \log m}{\delta s} = \gamma ,$$

e poichè le (c_1) del § 127 danno

$$\gamma = \frac{r_2}{r_1(r_1 - r_2)} \frac{\delta r_1}{\delta s} ,$$

e per le superficie $\underline{W}$ r_2 è funzione di r_1, si potrà assumere

$$\log m = \int \frac{r_2 \, d r_1}{r_1(r_1 - r_2)} ,$$

ed, ottenuto così $\underline{m}$ mediante una quadratura, con una seconda quadratura dalle (14) ri: caveremo u.

154. Nel § 151 si è visto che sulla falda S_1 della evoluta di una superficie S le immagini delle prime linee di curvatura sono geodetiche. Dimostreremo ora reciprocamente che, assunta sopra una superficie $\underline{S}$ qualunque una congruenza geodetica λ_r qual si voglia, esiste sempre una semplice infinità di superficie, a cui le tangenti alle linee λ_r sono normali e per le quali $\underline{S}$ è quindi una falda della evoluta.

Si consideri in $\underline{S}$ un punto qualunque P

di coordinate y_1, y_2, y_3 e si designino con $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ le coordinate di un punto $\mathcal{P}_1$ situato sulla tangente alla linea λ_r, che passa per $\mathcal{P}$, con r la distanza di $\mathcal{P}$ da $\mathcal{P}_1$ contata da questo verso quel punto. Conservando per il resto in ciò, che riguarda la superficie S e la congruenza λ_r, le solite notazioni, avremo le

$$\mathcal{Y}_h = y_h - r\,\zeta_h \;; \qquad 15)$$

e dimostreremo che si può scegliere r in guisa che $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3$ siano coordinate dei punti di una superficie, la cui normale in $\mathcal{P}_1$ coincide colla direzione $(\zeta_1\,\zeta_2\,\zeta_3)$. Le (15) derivate dànno

$$\mathcal{Y}_{h|p} = y_{h|p} - r\,\zeta_{h|p} - \zeta_h\, r_p \qquad 16)$$

e quindi ricordando le (i) del § 118

$$\sum_1^3{}_h\, \zeta_h\, \mathcal{Y}_{h|p} = \lambda_p - r_p$$

E poichè, le linee λ_p essendo geodetiche, le λ_p sono (§ 72) le derivate di una funzione λ rispetto alle x_p, basterà assumere

$$r = \lambda + c,$$

indicando con c una costante arbitraria.

Variando c, si ha dunque una semplice infinita di superficie, per le quali S può riguardarsi come una falda dell'evoluta, e tali che, considerando su due qualunque di esse come corrispondenti i punti immagini di uno stesso

punto di S

1° Esse ammettono tutte nei punti corrispondenti la stessa normale.

2° La distanza di due punti corrispondenti qualunque situati sopra due superficie determinate è costante.

Per queste proprietà le superficie, di cui si tratta, si dicono parallele fra di loro.

Si indichi con S_1 una qualunque delle superficie parallele, che, per quanto abbiamo ora dimostrato, e possono riguardarsi come evolventi rispetto ad S e per cui le linee λ_r corrispondono ad una congruenza di linee di curvatura. Indicando con A_{pq} i coefficienti della prima forma fondamentale relativa ad S_1, dalle (16) si ricavano per essi le espressioni

$$A_{pq} = r^2\alpha^2\lambda_p\lambda_q' + r^2\alpha\mu(\lambda_p\overline{\lambda}_q + \overline{\lambda}_p\lambda_q) + \{(1-r(\gamma))^2 + \mu^2 r^2\}\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q,$$

e quindi, indicando con A il discriminante della forma stessa

$$A = r^2\alpha^2\{1-r(\gamma)\}^2.$$

Questa ci avverte che A si annulla e quindi la superficie S_1 si riduce ad una linea se è $\alpha = 0$, cioè (§ 132) se le linee λ_r sono asintotiche, od anche (poichè esse sono geodetiche) se sono le genera

trici di una superficie rigata; cosa di cui è facile convincersi geometricamente. Indicando poi con $\mathcal{B}_{pq}$ i coefficienti della seconda forma fondamentale relativa ad S_1 avremo

$$\mathcal{B}_{pq} = -\sum_1^3{}_h\, y_{h|p}\, z_{h|q}\,,$$

cioè

$$\mathcal{B}_{pq} = r\alpha^2\lambda_p\lambda_q + r\alpha_1\mu(\lambda_p\overline{\lambda}_q + \overline{\lambda}_p\lambda_q) + \left\{r(\mu^2+(\gamma)^2)-(\gamma)\right\}\overline{\lambda}_p\overline{\lambda}_q$$

e quindi

$$\mathcal{B} = r\,\alpha^2(\gamma)\left\{r(\gamma)-1\right\}.$$

Indicando con $\mathcal{G}_1$ la curvatura totale della evolvente S_1 risulta dunque

$$\mathcal{G}_1 = \frac{(\gamma)}{r\left\{r(\gamma)-1\right\}}$$

Poichè $\underline{r}$ è uno dei raggi principali di curvatura di S_1, indicando l'altro con $\underline{\mathcal{R}}$ avremo dunque la

$$\mathcal{R} = r - \frac{1}{(\gamma)}\,,$$

che potevamo dedurre dalla (6).

Da questa si trae

$$\mathcal{R}_p = \lambda_p + \frac{1}{(\gamma)^2}\,(\gamma)_p\,,$$

e quindi

$$\sum_p \mathcal{R}^{(p)}\overline{\lambda}_p = \frac{1}{(\gamma)^2}\sum_p (\gamma)^{(p)}\overline{\lambda}_p\,.$$

Se la superficie $\underline{S}$ è applicabile sopra una superficie di rotazione e le linee λ_p sono le deformate dei meridiani, si ha

$$\sum_p (\gamma)^p\,\overline{\lambda}_p = 0$$

e però

$$\sum_p \mathfrak{R}^{(p)} \bar{\lambda}_p = 0 ,$$

la quale ci dice che $\underline{\mathfrak{R}}$ è funzione soltanto di $\underline{\lambda}$, cioè di $\underline{r}$. — Ricordando la eccezione fatta sopra per le superficie rigate, abbiamo dunque il seguente teorema reciproco di quello di Weingarten:

„Ogni superficie applicabile sopra una „superficie di rotazione può riguardarsi „come una falda dell'evoluta di una su„perficie W. Fanno eccezione soltanto quelle „superficie rigate, le cui generatrici sono le „deformate dei meridiani di una superfi„cie di rotazione."

Capitolo Sesto

Delle superficie di secondo grado.

Relazioni tra le curvature normali e le tangenziali delle linee di curvatura sulle superficie di 2° grado. — Integrazione della equazione delle geodetiche. — Superficie di 2° grado sviluppabili. — Determinazione delle linee di curvatura e delle curvature principali per una superficie di 2° grado non sviluppabile, data una espressione del suo elemento lineare. Condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma fondamentale rappresenti il quadrato dell'elemento lineare di una

„superficie di 2° grado. — Determinazione della superficie di 2°
„grado, il cui elemento lineare ha una espressione data. — Su-
„perficie di 2° grado e di rotazione.

---

155. La equazione generale delle superficie di 2° grado

$$\sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\, y_h\, y_k + 2\sum_{1\,h}^{3} c_h\, y_h + c = 0 \qquad 1)$$

derivata, se per le derivate delle y si sostituiscono le espressioni date dalle (i) del § 118, conduce alle

$$\sum_{1\,h}^{3}\Big(c_h + \sum_{1\,k}^{3} c_{hk}\, y_k\Big)\, \xi_h = 0$$

$$\sum_{1\,h}^{3}\Big(c_h + \sum_{1\,k}^{3} c_{hk}\, y_k\Big)\, \eta_h = 0$$

Queste equivalgono alle

$$\sum_{1\,k}^{3} c_{hk}\, y_k + c_h = \rho\, \zeta_h \qquad 2)$$

essendo

$$\rho = \sum_{1\,h}^{3}\Big(c_h + \sum_{1\,k}^{3} c_{hk}\, y_k\Big) \cdot \zeta_h \qquad 3)$$

Poichè dalla (2) risulta che non può essere $\rho = 0$, poniamo

$$\left.\begin{aligned} \rho p &= \sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\, \xi_h\, \zeta_k \\ \rho q &= \sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\, \eta_h\, \zeta_k \\ \rho r &= \sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\, \zeta_h\, \zeta_k \ ; \end{aligned}\right\} \qquad 4)$$

e deriviamo le (2), (3) e (4) sostituendo alle derivate delle ξ, η, ζ le loro espressioni date dalle e-

quazioni intrinseche del § 127. Troviamo così le equazioni

$$\rho_r = \rho\,(p\,\lambda_r + q\,\overline{\lambda}_r) \qquad 5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\,\xi_h\,\xi_k + \rho\,\omega_1 = 0 \\ &\sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\,\xi_h\,\eta_k = 0 \\ &\sum_{1\,hk}^{3} c_{hk}\,\eta_h\,\eta_k + \rho\,\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta p_r &= \delta\{\omega_1(\omega_1+\tau)-p^2\}\,\lambda_r - \omega_1\,q\,(q\,\lambda_r + p\,\overline{\lambda}_r) \\ \delta q_r &= \delta\{\omega_2(\omega_2+\tau)-q^2\}\,\overline{\lambda}_r + \omega_2\,p\,(q\,\lambda_r + p\,\overline{\lambda}_r) \\ \tau_r &= -2\,(\omega_1\,p\,\lambda_r + \omega_2\,q\,\overline{\lambda}_r) - \tau\,(p\,\lambda_r + q\,\overline{\lambda}_r)\,. \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Derivando ancora le (6), e ricordando anche le formole fondamentali del § 127, troviamo le

$$\delta\varphi_r = -\,\omega_1\,q\,\lambda_r - \omega_2\,p\,\overline{\lambda}_r \qquad 8)$$

e le

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1|r} + \omega_1\,(3p\,\lambda_r + q\,\overline{\lambda}_r) = 0 \\ \omega_{2|r} + \omega_2\,(p\,\lambda_r + 3q\,\overline{\lambda}_r) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

Le (8) e (9) equivalgono rispettivamente alle

$$\delta\gamma + \omega_1\,q = 0, \quad \delta(\gamma) + \omega_2\,p = 0 \qquad 8_1)$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= -\,H(p\lambda_r + q\,\overline{\lambda}_r) + 2\,(\omega_1\,p\,\lambda_r + \omega_2\,q\,\overline{\lambda}_r) \\ \delta_r &= -\,\delta(p\lambda_r + q\,\overline{\lambda}_r) + 2\,(\omega_2\,q\,\overline{\lambda}_r - \omega_1\,p\,\lambda_r) \end{aligned}\right\} \qquad 9_1)$$

nelle quali con $2H$ si designa la curvatura media della superficie.

Derivando le (8_1), sostituendo alle derivate di ω_1, ω_2, p e q le espressione date dalle (7) e dalle (9) e valendosi ancora delle (8_1) si ottengono le

$$\sum_{1\,r}^{2} \lambda^{(r)}\gamma_r + 3\,\gamma\,(\gamma) = 0$$

$$\sum_{1r}^{2} \overline{\lambda}^{(r)}(\gamma)_r - 3\, \gamma(\gamma) = 0 .$$

Possiamo quindi concludere (§ 103) che

„ Sulle superficie di 2° grado le linee di curva,
„ tura costituiscono un sistema isotermo di Liou,
„ ville."

Fra breve vedremo come, dato l'elemento li,
neare di una superficie di 2° grado, ne risulti,
no determinate le linee di curvatura. Da ciò
e da quanto fu dimostrato nel Capitolo Sesto
della Parte Prima risulta che per le superficie appli,
cabili sopra una superficie di 2° grado esiste e
si può determinare un integrale quadratico
della equazione delle geodetiche; la cui integra,
zione è così ridotta a semplici quadrature.

Dalle (9_1) per $H = 0$ e $G \gtrless 0$ seguono le $p = q = c$ e
(per le (8)) $\omega_1 = \omega_2 = 0$. — Ne concludiamo che:

„ Non esistono superficie minime di 2°
„ grado."

Combinando poi le espressioni delle τ_r da,
te dalle (7) con quelle delle H_r date dalle (9_1), si
hanno le

$$(H + \tau)_r = -(H + \tau)\,(p\lambda_r + q\overline{\lambda}_r) \qquad 9_2);$$

le quali, per le (5), equivalgono alle

$$\{\rho\,(H + \tau)\}_r = 0\ ;$$

e ci dicono quindi che il prodotto $\rho.(H + \tau)$ è co,

stante. Escluso il caso $H + \tau = 0$, risulta poi dalle (3) che, senza imporci alcuna limitazione, possiamo assumere

$$\rho(H + \tau) = 1 .$$

Prima di procedere oltre notiamo ancora che le (5) e (6) risolute rispetto alle c_{hk} dànno le equivalenti:

$$c_{hk} = \rho\{-\omega_1 \xi_h \xi_k - \omega_2 \eta_h \eta_k + \tau \zeta_h \zeta_k + p(\xi_h \zeta_k + \xi_k \zeta_h) + q(\eta_h \zeta_k + \eta_k \zeta_h)\} \quad 11);$$

e quindi, posto

$$C = (c_{11}\ c_{22}\ c_{33}) ,$$

$$C = \rho^3(\mathcal{G}\tau + \omega_1 q^2 + \omega_2 p^2) . \qquad 12)$$

Indicando poi con C_{hk} i complementi algebrici degli elementi c_{hk} in $\underline{C}$, troviamo per essi le espressioni

$$C_{hk} = \rho^2\left\{\begin{array}{l}\mathcal{G}\zeta_h\zeta_k - p^2\eta_h\eta_k - q^2\xi_h\xi_k + pq(\xi_h\eta_k + \xi_k\eta_h) \\ + q\omega_1(\eta_h\zeta_k + \eta_k\zeta_h) + p\omega_2(\xi_h\zeta_k + \xi_k\zeta_h) - \tau(\omega_2\xi_h\xi_k + \omega_1\eta_h\eta_k)\end{array}\right\}, \quad 11_1)$$

e per mezzo di queste, delle (1) e delle (2) calcolando il discriminante Δ della (1) ridotta a forma omogenea,

$$\Delta = \rho^2 \mathcal{G} \qquad 13)$$

156. Occupiamoci dapprima delle superficie di 2° grado sviluppabili, per le quali, come sapevamo e come ci dice ancora la (12), deve essere

$$\mathcal{G} = \omega_1 \omega_2 = 0 .$$

Per soddisfare a questa poniamo $\omega_2 = 0$, e tri-

viamo poi ω_1 invece di ω — Le equazioni (7) (8) e (9) assumono la forma

$$q = -\gamma \qquad 14)$$

$$(\gamma) = 0, \quad \gamma_r = \gamma^2 \bar{\lambda}_r \qquad A)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_r &= \omega(\gamma \bar{\lambda}_r - 3p\lambda_r) \\ p_r &= \{\omega(\omega + \tau) - p^2\}\lambda_r + \gamma(p\bar{\lambda}_r - \gamma\lambda_r) \\ \tau_r &= -(2\omega + \tau)p\lambda_r + \tau\gamma\bar{\lambda}_r \end{aligned}\right\} \quad B)$$

Se colle (A) si considerano le note equazioni

$$\sum_r \lambda^{(r)} \lambda_r = 1$$

$$\lambda_{r0} = \bar{\lambda}_r \varphi_s = \gamma \bar{\lambda}_r \lambda_s \, ,$$

si ha un sistema completo, il quale integrato come ci dicono appunto le (A) (§ 92) ci dà tutte le congruenze geodetiche ed isoterme del piano. Siccome poi il suo sistema integrale generale dipende da due costanti arbitrarie vediamo che queste sono ∞^2; quanti cioè i fasci di rette nel piano stesso. Così abbiamo il teorema notissimo secondo cui

„ Tutte le superficie sviluppabili di 2° grado „ sono tali che sviluppandole, le loro generatrici „ ci coincidono colle rette di un fascio."

Siccome poi i diversi fasci di rette nel piano si distinguono, prescindendo dalla loro posizione, soltanto per avere o no il centro a distanza finita; così avremo tutte le superficie

sviluppabili di 2° grado, considerando una congruenza qualunque di rette parallele, ed una di rette concorrenti. — Nel primo caso si hanno i cilindri e nelle equazioni (B) deve porsi $\gamma = 0$, poichè anche le linee λ_r sono geodetiche. In ogni caso la integrazione del sistema completo (B), ci dà $\underline{\omega}$, $\underline{p}$ e $\underline{\tau}$ espresse in funzione delle variabili indipendenti x_1, x_2 e di tre costanti arbitrarie; mentre la integrazione delle (5) (postovi $q = -\gamma$) ci darebbe $\underline{\rho}$ affetto da un fattore costante arbitrario, che però può sempre assumersi eguale ad $\underline{1}$. Le equazioni intrinseche della superficie, in cui per $\underline{\omega}$ e $\underline{\gamma}$ si pongano i valori così determinati, ci danno successivamente le $\zeta_h, \eta_h, \varsigma_h$ e le y_h; mentre dallo stesso procedimento tenuto risulta, e potrebbe verificarsi, che i coefficienti c_{hk}, definiti dalle (11) o dalle equivalenti (4) e (6) sono costanti; e così pure le c_1, c_2, c_3 date dalle (2), e la $\underline{c}$ data dalla (1); talchè possiamo asserire che per valori qualunque di $\omega_1, \omega_2, \gamma$ e (γ) che soddisfacciano alle equazioni (A) e (B), le equazioni intrinseche del § 127 si riferiscono alle superficie sviluppabili di 2° grado.

I coefficienti della equazione generale di queste superficie, prescindendo dalle costanti, che ne determinano la posizione nello spazio, ven-

gono così a dipendere da tre costanti arbitrarie; il che però non permette di concludere che altrettante siano quelle contenute nella equazione generale delle superficie sviluppabili di 2° grado. — Poichè il numero di queste, come sappiamo dalla Geometria analitica, è semplicemente ∞^2, esse debbono ridursi a due soltanto; del che ci si rende conto facilmente, osservando che, come risulta dalla (9₂), la somma $H+\tau$ contiene una costante arbitraria a modo di moltiplicatore; la quale per la (10) non è essenzialmente distinta da quella, da cui è affetto ρ.

157. Esaurito il caso delle superficie di 2° grado sviluppabili, possiamo supporre ω_1 ed ω_2 e quindi G diversi da 0. Le equazioni (9) combinate colla equazione

$$G = \omega_1 \omega_2 \qquad . \qquad 8)$$

ci dànno allora le

$$G_r + 4\, G\, (p\, \lambda_r + q\, \bar{\lambda}_r) = 0\,; \quad 15)$$

e poichè per G costante e diverso da 0 ne scende $p = q = 0$ e per le (8) (§ 83) $\delta = 0$, vediamo che:

„ La sfera è la sola superficie di 2° grado a
„ curvatura totale costante."

Lasciando ancora da parte questo caso già

considerato, possiamo supporre $\underline{g}$ variabile.

Poniamo allora

$$4\,N = -\log(g_1)\,, \qquad 16)$$

indicando con g_1 il valore assoluto di $\underline{g}$, e le (15) assumeranno la forma

$$N_r = p\,\lambda_r + q\,\bar{\lambda}_r\,. \qquad 15_1)$$

Queste confrontate colle (9_1) ci danno le

$$(H+T)_r = -(H+T)\,N_r\,,$$

e quindi, indicando con $\underline{c}$ una costante

$$(H+T) : \sqrt[4]{g_1} = c\,; \qquad 17)$$

e confrontate colle (5) la

$$\rho = c_1 \sqrt[4]{g_1}\,, \qquad 17_1)$$

indicando con c_1 un'altra costante.

Indichiamo con k_r il sistema coordinato covariante delle traiettorie ortogonali alle linee di parametro $\underline{g}$ o $\underline{N}$, cioè poniamo

$$N_r = \Delta_1 N\,k_r\,. \qquad 18)$$

Ponendo ancora

$$\cos\psi = \sum_r \lambda^{(r)} k_r\,,\ \operatorname{sen}\psi = \sum_r \lambda^{(r)} \bar{k}_r\,, \qquad 18_1)$$

le (15_1) assumeranno la forma

$$p = \Delta_1 N \cos\psi,\ q = -\Delta_1 N \operatorname{sen}\psi \qquad 15_2)$$

dalle quali scende la

$$p \operatorname{sen}\psi + q\cos\psi = 0\,. \qquad 15_3)$$

Deriviamo questa e, tenendo conto delle (7) e delle (8), troveremo le

$$\underset{1}{\Delta} \mathcal{N}^2(\psi_r - \varphi_r) = q\,w_1(w_1+\tau)\lambda_r - \mu\, w_2(w_2+\tau)\bar{\lambda}_r .$$

ovvero per le (15_2) e perchè, indicando con χ_r gli elementi del sistema coordinato del fascio, cui appartengono le linee k_r, valgono (§ 70) le

$$\varphi_r - \psi_r = \chi_r \;,$$

$$\underset{1}{\Delta} \mathcal{N} . \chi_r = w_2(w_2+\tau)\cos\psi\,\bar{\lambda}_r + w_1(w_1+\tau)\,\mathrm{sen}\,\psi\,\lambda_r .$$

Analogamente, derivando la

$$(\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2 = p^2 + q^2; \qquad 15_4)$$

che è pure conseguenza delle (15_2), troviamo le

$$(\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})_r = w_1(w_1+\tau)\cos\psi\,\lambda_r - w_2(w_2+\tau)\,\mathrm{sen}\,\psi\,\bar{\lambda}_r - (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2(\cos\psi\,\lambda_r - \mathrm{sen}\,\psi\,\bar{\lambda}_r).$$

Per le (18), le espressioni, cui siamo così giunti per le χ_r e le $(\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})_r$, equivalgono alle

$$2\,\underset{1}{\Delta} \mathcal{N} \sum_{1}^{2}{}_r\, \chi^{(r)} k_r = \delta(\tau - \mathcal{H})\,\mathrm{sen}\,2\psi$$

$$2\,\underset{1}{\Delta} \mathcal{N} \sum_{1}^{2}{}_r\, \chi^{(r)} k_r = (\mathcal{H} - \tau)(\mathcal{H} + \delta\cos 2\psi) - 2\mathcal{G}$$

$$2 \sum_{1}^{2}{}_r (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^{(r)} k_r = (\mathcal{H} - \tau)(\mathcal{H} - \delta\cos 2\psi) - 2\mathcal{G} - 2(\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2$$

$$2 \sum_{1}^{2}{}_r (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^{(r)} k_r = \delta(\tau - \mathcal{H})\,\mathrm{sen}\,2\psi$$

Confrontiamo queste colle

$$\chi_r = g\,k_r + (g)\,\bar{k}_r\,, \qquad \alpha)$$

in cui g e (g) rappresentano (§ 75 e 76) rispettivamente le curvature geodetiche delle linee k_r e $\bar{k}_r$ e colle

$$(\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})_r = \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}(\mu k_r + g\bar{k}_r) \qquad \beta)$$

che scendono (§ 43) dalle (33) del § 149, ed in cui è

$$\mu = \frac{\underset{2}{\Delta} \mathcal{N}}{\underset{1}{\Delta} \mathcal{N}} - (g)\,. \qquad 19)$$

Otteniamo così le formule

$$2 \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} . g = \delta(\tau - H) \operatorname{sen} 2\psi$$
$$2 \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} . (g) = (H - \tau)(H + \delta \cos 2\psi) - 2\mathcal{G}$$
$$2 \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}(\mu + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N}) = (H - \tau)(H - \delta \cos 2\psi) - 2\mathcal{G},$$

le quali, introducendo una indeterminata <u>m</u> equivalgono alle

$$\left.\begin{aligned} m\,\delta \operatorname{sen} 2\psi &= 2g \\ m\,\delta \cos 2\psi &= \mu + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} - (g) \end{aligned}\right\} \quad 20)$$

$$\left.\begin{aligned} m \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} &= \tau - H \\ \{(g) + \mu + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} + m H\} \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} + 2\mathcal{G} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 21$$

Osserviamo che non può essere $m = 0$, poichè ne risulterebbe $H = \tau$; e quindi per le (9_2) le

$$\tau_r = -\tau(p\lambda_r + q\bar{\lambda}_r) ;$$

e dal confronto di queste colle (7) $\omega_1 p = 0$, $\omega_2 q = 0$, cioè $p = q = 0$ e per le (8) $\delta = 0$, e quindi ricadremmo nel caso già escluso della sfera.

Se dunque la forma fondamentale considerata rappresenta il quadrato dell'elemento lineare di una superficie di 2° grado che non sia una sfera, le (20) dànno

$$m^2 \delta^2 = 4g^2 + (\mu + \underset{1}{\Delta} \mathcal{N} - (g))^2, \quad 20_1)$$

e di più determinano l'angolo 2ψ e quindi le linee di curvatura della superficie.

La (g) e la seconda delle (21) moltiplicata per <u>δ</u>, quando ad <u>m</u>δ si sostituisca l'uno e l'altro dei valori dati dalla (20_1), determinano poi ω_1 ed ω_2;

e ciò succede in guisa che, scambiando i due valori di $m\delta$, si scambiano fra di loro i valori di ω_1 ed ω_2; ma nello stesso tempo, per le (20), si scambiano pure fra di loro le linee $\overline{\lambda}_r$ e λ_r.

La prima delle (21) determina poi la incognita τ.

Siccome, determinate le linee di curvatura e le corrispondenti curvature principali, si hanno (§ 127) le equazioni intrinseche della superficie e quindi la superficie stessa, prescindendo da spostamenti rigidi nello spazio, così possiamo concludere che

„ Se esiste una superficie di 2° grado, che abbia per espressione del quadrato del suo elemento lineare una forma fondamentale data, il cui invariante di Gauss sia diverso da $\underline{0}$, la superficie stessa è unica e determinata."

Partendo da una forma fondamentale data $\underline{\varphi}$, il cui invariante di Gauss non sia costante si designino con ω_1, ω_2, ψ, m e τ i valori di queste incognite determinati nel modo indicato sopra ed a $\underline{N}$, $\underline{p}$ e $\underline{q}$ si mantengano i significati attribuiti loro dalle formole (16) e (15_2) — Dimostreremo che:

„ Perchè $\sqrt{\varphi}$ rappresenti l'elemento lineare

„ di una superficie di 2° grado, reale o no, secon
„ do che ω_1 ed ω_2 saranno o no reali, è necessario e basta
„ 1° Che $\underline{m}$ non sia identicamente nullo
„ 2° Che essendo $H = -\omega_1 - \omega_2$, e G_1 il valore assolu-
„ to dell'invariante di Gauss per la forma φ il
„ rapporto $(\tau + H) : \sqrt[4]{G_1}$ sia costante.
„ 3° Che siano soddisfatte le equazioni (e_1) del
„ §. 127 nelle quali si ponga $\lambda_r = \cos\psi\, k_r + \operatorname{sen}\psi\, \bar{k}_r$,
„ e le (8), in cui per $\underline{p}$ e $\underline{q}$ siano posti i valori da-
„ ti dalle (18)."

Che la prima e l'ultima di queste condizio-
ni siano necessarie è già stato dimostrato:
la seconda è contenuta implicitamente nella (17)
Che poi le condizioni, di cui si tratta, siano suf-
ficienti si vede osservando che per esse e per i va-
lori di ω_1, ω_2, λ_r come sopra determinati risul-
tano soddisfatte le equazioni intrinseche del § 127.
Esiste dunque una superficie determinata di
forma, ma la cui posizione nello spazio rima-
ne arbitraria, le cui curvature principali cam-
biate di segno sono ω_1 ed ω_2; e che ha per linee di
curvatura le λ_r e le loro traiettorie ortogonali.
Se consideriamo questa superficie in una sua
posizione qualunque, rimangono per essa deter-
minate in virtù delle citate equazioni intrin-

sache le ζ_h, η_h, ζ_h e poi le y_h. – Si verifica poi, come nel caso delle superficie sviluppabili che, assumendo per ϱ il valore dato dalla (17_1), risultano costanti i coefficienti c_{hk} determinati dalle (11), o dalle equivalenti (9) e (6); e quindi i coefficienti c_h e c determinati dalle (2) e dalla (1); dopo di che risulta dimostrato che la superficie, di cui si tratta è di 2° grado. Per ciò giova osservare che dalle (15_2) scendono le $(15)_3$ e $(15)_4$, le quali derivate dànno le

$$(\underset{1}{\Delta} N)_r = \cos\psi\, p_r - \operatorname{sen}\psi\, q_r$$
$$\underset{1}{\Delta} N(\chi_r - \varphi_r) = \cos\psi\, q_r + \operatorname{sen}\psi\, p_r \;;$$

e dal confronto di queste colle (α) e (β) le

$$\cos\psi\, p_r - \operatorname{sen}\psi\, q_r = \underset{1}{\Delta} N(\mu k_r + g\bar{k}_r)$$
$$\cos\psi\, q_r + \operatorname{sen}\psi\, p_r = \underset{1}{\Delta} N(g k_r + (g)\bar{k}_r) \;;$$

e da queste combinate colle (20) e (21) le espressioni delle p_r e q_r date dalle (7).

Giova osservare altresì che dalla equazione $(\tau + \mathcal{H}) : \sqrt{g_1} =$ costante, dalla (g) e dalle (c_1) del § 127 e dalle (8), che si suppongono soddisfatte, scendono le (9) e le espressioni delle τ_r date dalle (7).

158. Perchè, come abbiamo testè dimostrato, una superficie di 2° grado non sviluppabile risulta determinata di forma da una espressione qualunque del suo elemento lineare è

evidente, che le costanti, da cui dipende la sua forma, debbono potersi esprimere come è noto per la sfera, per mezzo dei coefficienti di φ e delle loro derivate; cioè (§ 33), tali espressioni dovendo essere di natura invariantiva, per mezzo di $\underline{G}$ e degli invarianti, che si possono ottenere associando $\underline{G}$ a $\underline{\varphi}$. – Procederemo ora a questa determinazione colla scorta della Geometria analitica.

Dalla (12) scende prima di tutto che, posto

$$\Omega = G\tau + \omega_1 q^2 + \omega_2 p^2, \qquad 22)$$

perchè la superficie di 2° grado sia dotata di centro è necessario e basta che sia $\Omega \lessgtr 0$. – Supponendo questa condizione soddisfatta, deve essere possibile scegliere le costanti di traslazione contenute nelle y_1, y_2, y_3 in modo che nella (1) le c_1, c_2, c_3 risultino eguali a $\underline{o}$. Per le (2) varranno allora le identità

$$\sum_1^3{}_k c_{hk} y_k = \rho\, \vartheta_h$$

le quali, per le (11), assumono la forma

$$\sum_1^3{}_h (p\,\vartheta_h - \omega_1 \zeta_h)\, y_h = 0$$

$$\sum_1^3{}_h (q\,\vartheta_h - \omega_2 \eta_h)\, y_h = 0$$

$$\sum_1^3{}_h (p\,\zeta_h + q\,\eta_h + \tau\,\vartheta_h)\, y_h = 1.$$

Da queste si traggono per le y_h le espressioni

$$\mathfrak{D} y_h = \mathcal{G} \cdot \zeta_h + p\,\omega_2\, \xi_h + q\,\omega_1\, \eta_h\,; \qquad 23)$$

per le quali si potrebbe in fatti verificare che sod-disfanno alle equazioni (i) del § 127. Le (22) combinate colle (11) dànno alla loro volta la

$$\sum_{1\,hk}^{3} b_{hk}\, y_h\, y_k = 1,$$

nella quale si è posto

$$\mathcal{G}\, \rho \cdot b_{hk} = \mathfrak{D} \cdot c_{hk}\,,$$

e che è quindi la equazione della superficie di 2° grado riferita al centro. — La equazione della su-perficie stessa riferita agli assi sarà poi

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 = 1,$$

indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le radici della equazio-ne cubica

$$x^3 - (H + \tau)x^2 + (\mathcal{G} + H\tau - \Delta_1 N^2) \cdot x - \mathfrak{D} = 0,$$

moltiplicate per $\mathfrak{D} : \mathcal{G}$. — Per calcolare i coefficienti di questa equazione servono le espressioni del-le c_{hk} date dalle (12,).

Si supponga in secondo luogo $\mathfrak{D} = 0$, cioè, per la (22),

$$\mathcal{G}\,\tau + \omega_1 p^2 + \omega_2 q^2 = 0. \quad (24)$$

In questo caso le costanti additive contenute in y_1, y_2, y_3 si debbono poter scegliere in modo che riescano soddisfatte le $c_{13} = c_{23} = c_{33} = 0$. — Indi-cando anche con ξ, η, ζ i coseni di direzione indi-cati fin qui con ξ_3, η_3, ζ_3, per le (11) queste equazioni

assumono la forma

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 \xi &= p\zeta \\ \omega_2 \eta &= q\zeta \\ p\xi + q\eta + \tau\zeta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 25)$$

Per la (24) queste equazioni possono essere soddisfatte da valori non tutti nulli di ξ, η, ζ e i valori, che assieme alla equazione

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

risultano così determinati, a meno del segno, soddisfanno alle equazioni (i) del § 127. Esse ci danno

$$\zeta^2 = \frac{g^2}{g^2 + p^2\omega_2^2 + q^2\omega_1^2} \quad . \quad 26)$$

Ponendo ancora $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = c$, dalle (2) ravviamo poi le

$$\left.\begin{aligned} p\sum_1^3{}_h \zeta_h y_h - \omega_1 \sum_1^3{}_h \xi_h y_h &= -\frac{c\xi}{\rho} \\ q\sum_1^3{}_h \zeta_h y_h - \omega_2 \sum_1^3{}_h \eta_h y_h &= -\frac{c\eta}{\rho} \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

$$p\sum_1^3{}_h \xi_h y_h + q\sum_1^3{}_h \eta_h y_h + \tau\sum_1^3{}_h \zeta_h y_h = 1 - \frac{c\zeta}{\rho},$$

le quali combinate colla (24) ci dànno la

$$c = \rho\zeta, \qquad 28)$$

e, tenuto conto di questa, si riducono a due sole indipendenti, per le quali possiamo assumere le (27). Osserviamo che, tenuto conto delle (25) le espressioni delle ζ_r date dalle (i) del § 127 assumono la forma

$$\mathfrak{I}_r = -\mathfrak{I}(p\lambda_r + q\bar{\lambda}_r),$$

dalle quali e dalle (5) risulta che il primo membro della (28) è, come deve essere, costante.

Dalle (25) risulta ancora che le (27) non contengono effettivamente y_3. Esse risolute rispetto ad y_1 ed y_2 danno le espressioni

$$\mathcal{G} y_h = \mathfrak{I}^2 (H \mathfrak{I}_h - p \zeta_h - q \eta_h) \quad (h = 1, 2) \qquad 29)$$

Si calcoli ora la espressione

$$\sum_1^3{}_{hk} c_{hk} y_h y_k \quad ,$$

valendosi delle (11) per le c_{hk} e delle (29) per le y_h, il che è permesso essendo identicamente nulle le c_{13}, c_{23}, c_{33}. Troviamo così:

$$\mathcal{G}^2 \sum_1^2{}_{hk} c_{hk} y_h y_k = \rho \mathfrak{I}^4 \{ (H^2 - \mathcal{G}) \tau - H (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2 \} \;;$$

e siccome la (1) nel nostro caso assume la forma

$$\sum_1^2{}_{hk} c_{hk} y_h y_k + 2 c y_3 = 0 , \qquad 30)$$

ricordando anche la (28) troviamo per la y_3 la espressione

$$2 \mathcal{G}^2 y_3 = \mathfrak{I}^3 \{ \tau (\mathcal{G} - H^2) + H (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2 \} . \qquad 29_1)$$

In fine la (30) per le (11) e (28) si può ridurre alla forma

$$y_3 = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 ,$$

α_1 ed α_2 essendo le radici della equazione

$$x^2 + (\tau + H) x + \mathcal{G} + \tau H - (\underset{1}{\Delta} \mathcal{N})^2 = 0 ,$$

divise per $2\mathfrak{J}$; e la espressione di $\mathfrak{J}$ essendo data dalla (26).

Si potrebbe ancora verificare che le espressioni di y_1, y_2 ed y_3 date dalle (29) e (29_1) soddisfano alle equazioni (i) del § 27.

159. Abbiamo dimostrato nel § 144 che affinchè una superficie a curvatura totale variabile sia di rotazione è necessario e basta che le linee k_r siano insieme geodetiche e linee di curvatura.

Ora dimostreremo che, quando si tratti di superficie di 2° grado una di queste condizioni è necessaria conseguenza dell'altra; dimostreremo cioè che perchè una superficie di 2° grado a curvatura variabile sia di rotazione è necessario e basta che per essa le linee k_r siano linee di curvatura. Ciò infatti equivale a supporre $\psi = 0$, ovvero $\psi = \frac{\pi}{2}$; cioè per le (15_2) $q = 0$, ovvero $p = 0$, e quindi per le (8_1) $\gamma = 0$, ovvero $(\gamma) = 0$.

Partendo dalle espressioni delle derivate di ω_1 ed ω_2 date dalle (9) si riconosce che la equazione $p.q = 0$ esprime anche la condizione necessaria e sufficiente per l'annullarsi del determinante funzionale $\frac{d(\omega_1\, \omega_2)}{d(x_1, x_2)}$. — E siccome quelle e.

quazione è soddisfatta soltanto da $\psi = 0$ e $\psi = \frac{\pi}{2}$, così possiamo concludere che

„ Le sole superficie di 2° grado, per le qua-
„ li esiste una relazione tra le curvature prin-
„ cipali (cioè che sono anche superficie W) sono
„ quelle di rotazione. „

Capitolo Settimo

Della Applicabilità delle Superficie.

Primo problema della applicabilità in generale, ed in particolare per le superficie a curvatura costante e per quelle applicabili sopra superficie di rotazione. – Secondo problema della applicabilità. – Equazione di Raffy. – Equazione cui debbono soddisfare le coordinate cartesiane ortogonali dei punti della superficie cercata. – Metodo ed equazione fondamentale di Weingarten.

160. Sappiamo (§. 67) che due superficie si dicono applicabili l'una sull'altra, quando costituiscono due forme diverse di uno stesso velo flessibile ed inestendibile, talchè l'una si può sovrapporre all'altra senza alterazione degli angoli e delle distanze contate sempre lungo le stesse linee. Analiticamente poi ciò

equivale a dire che due superficie sono o no applicabili fra di loro, secondo che i quadrati dei loro elementi lineari sono o non sono espressi da forme differenziali quadratiche equivalenti.

Il primo problema, che si presenta nella teoria della applicabilità delle superficie ha per oggetto di riconoscere se due superficie date S_1 ed S_2 sono applicabili fra di loro e, nel caso affermativo, di stabilire le formole, che danno la effettiva applicazione dell'una sull'altra, cioè che determinano una tale corrispondenza tra i punti P_1 di S_1 ed i punti P_2 di S_2, che ogni punto P_1 possa farsi coincidere col suo corrispondente P_2. Questo problema però è stato da noi implicitamente risoluto nel Capitolo Sesto della Introduzione, poichè ivi sono stati dati i criterii per riconoscere se due forme differenziali quadratiche binarie positive φ e χ rispettivamente delle variabili x_1, x_2; y_1, y_2 sono equivalenti ed indicati i metodi per determinare nel caso affermativo, tutte le possibili trasformazioni dell'una nell'altra. — Se una di tali trasformazioni è definita dalle formole

$$y_1 = y_1(x_1\, x_2),\; y_2 = y_2(x_1, x_2),$$

queste medesime formule ci dicono che ogni punto $(x_1 x_2)$ della superficie, per cui l'elemento lineare è espresso da $\sqrt{\varphi}$, si può far coincidere col corrispondente $(y_1 y_2)$ di quella, per cui l'elemento lineare è espresso da $\sqrt{\chi}$.

Richiamando i risultati del Capitolo citato noi possiamo prima di tutto asserire che ogni superficie a curvatura totale costante è applicabile sopra un'altra superficie soltanto nel caso che anche questa abbia la stessa curvatura costante; e che in questo caso la applicazione può farsi in un numero ∞^3 di modi. Per ottenere le formole, che dànno tutte queste applicazioni, si deve integrare il sistema completo, che risulta delle equazioni (α) e (β) del §. 46; e poichè dalla teoria della integrazione dei sistemi completi risulta che a valori arbitrarî iniziali di x_1, x_2 e $\frac{dx_2}{dx_1}$ si possono far corrispondere valori arbitrarî di y_1, y_2 e $\frac{dy_2}{dy_1}$ si conclude che due superficie S_1 ed S_2, le cui curvature totali siano eguali ad una stessa costante, possono applicarsi l'una sull'altra per guisa che un punto arbitrario P_2 di S_2 coincida con un punto arbitrario P_1 di S_1, e che ad una direzione arbitraria uscente da P_1 si so-

vrapponga una direzione arbitraria uscente da P_2.

Evidentemente tutte le proprietà, che competono ad una superficie considerata come velo flessibile ed inestendibile ed alle linee sopra di essa tracciate, appartengono a tutte le forme, che il velo e conseguentemente le linee stesse possono assumere nello spazio. Tali sono le proprietà tutte, di cui ci siamo occupati nella Prima Parte di queste Lezioni. In particolare le linee geodetiche sono tali indipendentemente dalle forme diverse, che una stessa superficie può assumere senza alterazione del suo elemento lineare; del che e da quanto è stato detto sopra risulta che due superficie, le cui curvature totali siano eguali ad una stessa costante, si possono applicare l'una sull'altra per guisa che due punti P_2 e Q_2 dell'una si sovrappongono rispettivamente a due punti P_1 e Q_1 dell'altra, purchè la distanza geodetica di questi sia eguale alla distanza geodetica di quelli. — Infatti basterà perciò far coincidere P_2 con P_1 e la direzione della geodetica $P_2 Q_2$ con quella della geodetica $P_1 Q_1$. — Poichè in particolare, ogni porzione di una data superficie a curva-

tura costante è applicabile sopra un'altra porzione qualunque della superficie stessa, dalla proprietà dimostrata sopra risulta che le superficie a curvatura costante sono tali che ogni figura tracciata sovra di esse può muoversi in esse comunque senza alterarsi, come è altresì evidente che questa proprietà è caratteristica delle superficie stesse. Ne segue che per queste superficie e per queste soltanto è applicabile quel metodo della sovrapposizione delle figure eguali, di cui si fa continuo uso nella Geometria del piano.

Vedemmo (§ 44) che esiste un numero ∞^3 di superficie di rotazione dotate di una stessa curvatura costante diversa da 0 e però applicabili fra di loro. Supponiamo assunte come coordinate i meridiani e i paralleli pei quali (§ 57) la espressione dell'elemento lineare assume la forma

$$ds^2 = du^2 + H^2 dv^2,$$

essendo H funzione soltanto di u. — La curvatura totale ha quindi (§ 81) la espressione

$$G = -\frac{1}{H}\frac{d^2H}{du^2} \qquad 1)$$

e però indicando con c e C delle costanti arbitrarie e supponendo prima $G = 0$, si avrà

$$H = cu + C,$$

e in particolare ponendo $c=0$, $C=1$ troviamo la espressione nota del quadrato dell'elemento lineare del piano

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Supponiamo in secondo luogo G costante e >0 e poniamo

$$G = \frac{1}{R^2}.$$

Integrando troviamo

$$H = c\frac{\cos u}{R} + C \operatorname{sen}\frac{u}{R}$$

e in particolare

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2\frac{u}{R}\, dv^2,$$

espressione, che, come è facile riconoscere, appartiene al quadrato dell'elemento lineare della sfera di raggio R, la quale si assume come tipo delle superficie a curvatura costante positiva.

Si supponga infine G costante e negativa e si ponga

$$G = -\frac{1}{R^2}$$

Integrando ancora la (1) troviamo

$$H = c\, e^{\frac{u}{R}} + C\, e^{-\frac{u}{R}}.$$

In particolare prendendo $c=1$, $C=0$ abbiamo come espressione dell'elemento lineare della superficie di rotazione, di cui si tratta

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2. \qquad I)$$

Si osservi ora che, se

$$z = f(r)$$

è l'equazione della curva meridiana di una superficie di rotazione, essendo in pari tempo

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

si ha per il quadrato dell'elemento lineare della superficie stessa la espressione

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + \left(1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right) dr^2$$

od anche, posto

$$u = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}\, dr\,,$$

$$ds^2 = du^2 + r^2 d\varphi^2. \qquad II)$$

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dr}\right)\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

ne risulta

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{du}\right)^2}$$

Poichè dal confronto della (I) colla (II) si riconosce che per la superficie, il cui elemento lineare è dato dalla (I), è

$$r = e^{\frac{u}{R}},$$

avremo dunque anche

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}\, e^{\frac{2u}{R}}}$$

la quale integrata col porre

$$e^{\frac{u}{R}} = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

dà

$$z = R\left\{\log \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \cos\varphi\right\}.$$

Questa e la

$$r = R \operatorname{sen} \varphi$$

possono dunque riguardarsi come equazioni della curva meridiana della superficie di rotazione a curvatura costante totale eguale a $-\frac{1}{R^2}$, per la quale la espressione del quadrato dell'elemento lineare riferito ai meridiani ed ai paralleli assume la forma (I). La curva stessa si chiama trattrice e la superficie di rotazione da essa generata, e che si assume come tipo delle superficie a curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$, pseudosfera.

161. Dal § 47 risulta ancora che se una forma differenziale quadratica binaria positiva φ, il cui invariante G di Gauss sia variabile e tale che $\Delta_1 G$ e la curvatura geodetica delle linee di parametro G siano certe funzioni f ed F della sola G, essa è suscettibile di un numero semplicemente infinito di trasformazioni in sè stessa, ed è trasformabile un egual numero di volte in ogni altra forma χ, per cui le stesse condizioni siano soddisfatte colle stesse funzioni f ed F. Vedemmo di più nei § 48 e 49 che le trasformazioni della φ in sè stessa o nella χ si ottengono con semplici quadrature, e nel § 57 che le forme φ, che

soddisfanno alle condizioni indicate, sono quelle, che esprimono i quadrati degli elementi lineari di superficie di rotazione. Possiamo dunque asserire che

„ Ogni superficie a curvatura totale variabile applicabile sopra una superficie di rotazione può essere applicata un numero semplicemente infinito di volte sopra sè stessa e sopra ogni altra superficie ad essa applicabile. — Le formole per l'effettiva applicazione si ottengono con semplice quadrature."

Risulta in fine dal §. 57 che, esclusi i casi già considerati, una forma differenziale quadratica binaria positiva φ non ammette alcuna trasformazione in sè stessa ed ammette al più una trasformazione, che risulta determinata in termini finiti in un'altra forma data χ. — Ricordando che anche le superficie a curvatura totale costante sono applicabili sopra superficie di rotazione si può dunque asserire che

„ Fatta eccezione per le superficie di rotazione, non esiste alcuna superficie trasformabile in sè stessa senza alterazione del suo elemento lineare; ed ogni superficie ap-

„plicabile sopra ad un'altra lo è in un solo „modo."

162. Il secondo e più importante problema della teoria della applicabilità delle superficie è quello, che si propone di determinare tutte le superficie, che per il quadrato del loro elemento lineare ammettono una espressione

$$\varphi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

φ essendo una forma positiva data qualunque. Poichè, data una superficie per mezzo della sua equazione in termini finiti, si può sempre avere la espressione del quadrato del suo elemento lineare, questo problema comprende, evidentemente, in sè l'altro. — „Trovare tutte le superficie applicabili sopra una superficie „data."

Poichè noi consideriamo le superficie come rappresentate dalle loro equazioni intrinseche, e l'equazione intrinseca di una superficie dipende unicamente dagli invarianti α, β, μ relativi ad una qual si voglia congruenza di linee λ_r sopra di essa tracciata, come risulta dal § 117, la risoluzione del problema sopra enunciato dipende dalla integrazione del sistema fondamentale, che compren-

de le equazioni (g) e (c). — Scegliendo opportu-
namente la congruenza λ_r, il sistema stesso as-
sume forme speciali, che possono presentare,
secondo i casi, speciali vantaggi.

Se si assume come congruenza λ_r
quella delle linee di curvatura delle super-
ficie cercate, il sistema fondamentale è quel-
lo che risulta delle equazioni (g_1) e (c_1) del § 127,
nelle quali assieme ad w_1 ed w_2 deve conside-
rarsi come incognita la congruenza λ_r, cioè
l'angolo, che le sue linee fanno con quelle di u-
na congruenza data qualunque. Alle equa-
zioni stesse sarà però utile di sostituire le (C_1)
del §. 130, nelle quali alle incognite w_1 ed w_2 lega-
te dalla equazione (g_1) è stata sostituita la in-
cognita $N = \frac{1}{2} \log \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

Se la congruenza λ_r si fa coincidere con quel-
la delle linee asintotiche, le equazioni fondamen-
tali assumono la forma (c_2) del § 232 sulle qua-
li è $\mu^2 = - G$ e sono da riguardare come incogni-
te la congruenza λ_r e l'invariante β, che cambia-
to di segno rappresenta la curvatura normale
delle traiettorie ortogonali alle asintotiche, ov-
vero il doppio della curvatura media della su-
perficie. Vedemmo nel § 148 che il supporre

$\gamma = 0$ equivale ad ammettere che esistano delle superficie rigate, il cui elemento lineare sia espresso da $\sqrt{\varphi}$; le quali sono appunto tutte e soltanto quelle, per cui è $\gamma = 0$; e vedemmo anche come si possa riconoscere se tali superficie esistano e determinarle nel caso affermativo. — Supposto γ diverso da $\underline{0}$ la prima delle citate equazioni (c_2) è risolubile rispetto a β, ed il valore da essa dato per $\underline{\beta}$ ci conduce ad una equazione la quale contiene come incognita la sola congruenza λ_r, cioè, per esempio, l'angolo che le linee di questa congruenza fanno con quelle di una congruenza data ed è di secondo ordine rispetto a questo. Così dunque si riesce ad una sola equazione di 2° ordine con una sola funzione incognita da integrare. Questa equazione è però complicata con quantità immaginarie, se si tratta di superficie a curvatura totale positiva; poichè in questo caso μ è immaginaria ed è pure tale la congruenza delle asintotiche.

Se G è costante e negativo la equazione, di cui si tratta, assume la forma (5) del § 143. Per G negativo, ma variabile, la equazione risultante assume una forma molto compli:

cata che è stata data dal Raffy per il caso in cui le coordinate dei punti della superficie siano ortogonali.

163. Il metodo più comunemente usato per la risoluzione del problema, di cui ci occupiamo, consiste nel determinare direttamente le coordinate cartesiane ortogonali y_1, y_2, y_3 della superficie nello spazio in funzione delle variabili x_1, x_2. A questo intento si osserva che, indicando con y una qualunque di dette coordinate, avendosi identicamente

$$\varphi \equiv \sum_1^3{}_h \, dy_h^2$$

la forma

$$\varphi - dy^2 \equiv \psi$$

dovrà essere positiva e di classe 0; come, reciprocamente, soddisfatta questa condizione, la y sarà sempre una coordinata della superficie.

Posto

$$c_{rs} = a_{rs} - y_r \, y_s ,$$

risulterà

$$\psi \equiv \sum_1^2{}_{rs} \, c_{rs} \, dx_r \, dx_s ,$$

e, indicando con c il discriminante di ψ, con $c^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca, varranno le

$$\left.\begin{aligned} c &= a\left(1 - (\Delta_1 y)^2\right) \\ \left\{1 - (\Delta_1 y)^2\right\} c^{(rs)} &= a^{(rs)} - y^{(r)} y^{(s)} \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Indicando ancora con $c_{rs,t}$ i simboli di Christoffel relativi alla forma ψ, varranno per questi le espressioni

$$c_{rs,t} = a_{rs,t} - y_t \frac{d^2 y}{dx_r\, dx_s} \qquad 3)$$

Per calcolare ancora i simboli di Riemann $c_{rt,su}$ relativi a ψ, osserviamo prima di tutto che valgono (§.41) le identità

$$(\Delta_1 y)^2 a^{(hk)} = y^{(h)} y^{(k)} + \overset{(h)}{y} \overset{(k)}{y},$$

coll'aiuto delle quali dalle (2) e (3) si traggono facilmente le

$$\sum_{hk} c^{(hk)} c_{ru,h}\, c_{st,k} = \sum_{hk} a^{(hk)} a_{ru,h}\, a_{st,k} - \frac{d^2 y}{dx_s dx_t} \frac{d^2 y}{dx_r dx_u} + \frac{1}{1-(\Delta_1 y)^2} y_{ru}\, y_{st}.$$

Ricordando ora le espressioni dei simboli di Riemann date dalle (8) del § 15 si ottengono le

$$c_{rt,su} = a_{rt,su} + \frac{1}{1-(\Delta_1 y)^2} \left\{ y_{ru} y_{st} - y_{rs}\, y_{ut} \right\}$$

e in particolare la

$$c_{12,12} = a_{12,12} - \frac{1}{1-(\Delta_1 y)^2} \left\{ y_{11} y_{22} - y_{12}^2 \right\}. \qquad 4)$$

Ricordando (§ 37) che la espressione

$$\frac{1}{a}\left(y_{11} y_{22} - y_{12}^2 \right)$$

è un invariante, che si denota col simbolo $\Delta_{22} y$, e che l'annullarsi del simbolo $c_{12,12}$ rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè la forma ψ sia di classe $\underline{0}$, e ricordan-

do ancora la formola (14) del § 16, deduciamo dalla (4) che la equazione

$$\Delta_{22}\, y = \{ 1 - (\Delta_1 y)^2 \} \cdot \mathcal{G} \qquad A)$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè la forma ψ sia di classe $\underline{0}$. — La (A) è quindi la equazione cercata. La prima delle (2) ci dice di più che affinchè la forma ψ risulti positiva si richiede ancora che sia

$$(\Delta_1 y)^2 < 1 . \qquad B)$$

Perchè la $\underline{y}$ possa assumersi come una delle tre coordinate cartesiane ortogonali per una superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$, essa dovrà soddisfare, oltre che alla equazione (A), anche alla disuguaglianza (B)

Alla equazione (A) si può giungere anche partendo dalle equazioni del §. 116. — Infatti dalle (2) calcolando la espressione di $\mathfrak{I}_h$ ed elevandola poi al quadrato si trova

$$\mathfrak{I}_h^2 = 1 - (\Delta_1 y_h)^2 ,$$

mentre le $(\mathfrak{I}_2)$ danno

$$\Delta_{22}\, y_h = \mathfrak{I}_h^2 \cdot b ,$$

e questa per la precedente e per la $(\mathcal{G})$ ci dice appunto che ciascuna delle y deve soddisfare alla equazione (A).

164. Il Weingarten in una Memoria, per

la quale l'Accademia delle Scienze di Parigi gli assegnò il Gran Premio di Matematiche per l'anno 1894, diede un nuovo metodo per risolvere il problema.

" Trovare tutte le superficie applicabili " sopra una superficie data."

Questo metodo verrà qui esposto in modo alquanto diverso da quello tenuto dall'Autore, ma più conforme alle vedute generali seguite in queste Lezioni. A questo intento premettiamo alcune considerazioni.

Partiamo dalle equazioni (i) del § 118, le quali colle posizioni

$$
\begin{aligned}
Q_r &= \alpha\lambda_r + \mu\bar{\lambda}_r \\
P_r &= \mu\lambda_r + \beta\bar{\lambda}_r
\end{aligned}
$$

assumono la forma

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi_r &= \eta\varphi_r + \zeta Q_r \\
\eta_r &= -\xi\varphi_r + \zeta P_r \\
\zeta_r &= -\xi Q_r - \eta P_r
\end{aligned}
\right\} \quad i)
$$

Facciamo una rappresentazione sferica per le tangenti alle linee λ_r analoga a quella di Gauss per le normali alla superficie. Ricordando che i coseni di direzione ξ_1, ξ_2, ξ_3 di queste tangenti soddisfanno tutti alle equazioni (i), troviamo così per il quadrato dell'elemento lineare

ne della sfera di raggio 1 la espressione

$$\chi = \sum_{1\,h}^{3} d\zeta_h^2 = \sum_{1\,rs}^{2} e_{rs}\, dx_r\, dx_s \ ,$$

essendo

$$e_{rs} = \varphi_r \varphi_s + Q_r Q_s \ . \qquad 5)$$

Se si confrontano queste colle (5) del § 41 se ne deduce in prima che le φ_r costituiscono il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee tracciate sulla sfera di raggio 1 e le Q_r quello della congruenza ad essa ortogonale. Se poi si assume come forma fondamentale la χ e, applicando un teorema del §. 42, si scrivono le condizioni di integrabilità del sistema (i), ricordando che le $\overline{\varphi}_r$ sono identiche colle Q_r si giunge alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \sum_{rs} e^{(rs)} Q_{rs} &= -\sum_r P^{(r)} \varphi_r \ , \\ \sum_{rs} e^{(rs)} \varphi_{rs} &= \sum_r P^{(r)} Q_r \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

$$\sum_{rs} e^{(rs)}\ \overline{P}_{rs} = 1 \ . \qquad 7)$$

Se si indica con χ_r il sistema coordinato del fascio di congruenze tracciate sulla sfera, cui appartengono le congruenze φ_r e Q_r, si hanno le identità

$$Q_{rs} = -\varphi_r\, \chi_s \, , \varphi_{rs} = Q_r\, \chi_s$$

e quindi le

$$\sum_{rs} e^{(rs)} Q_{rs} = -\sum_r \chi^{(r)} \varphi_r , \sum_{rs} e^{(rs)} \varphi_{rs} = \sum_r \chi^{(r)} Q_r \ ,$$

le quali confrontate colle (6) ci dicono che le P_r sono identiche colle χ_r; che cioè costituiscono il sistema coordinato del fascio, cui appartiene la congruenza φ_r. — Per la sfera di raggio 1 essendo $\mathcal{G}=1$, la (7) è poi una conseguenza delle (6), poichè essa equivale alla nota relazione (§. 42)

$$\sum_{rs} e^{(rs)} \overline{\chi}_{rs} = \mathcal{G}.$$

Se ora delle equazioni (i) del § 118 richiamiamo ancora le

$$y_r = \zeta \lambda_r + \eta \overline{\lambda}_r \quad , \quad i_1)$$

riconosciamo facilmente che, quando le ζ e le η soddisfacciano alle (i), la condizione di integrabilità delle (i_1) assumono la forma

$$\sum_r \overset{(r)}{\lambda} Q_r = \sum_r \overset{(r)}{\lambda} P_r \qquad 8)$$

Osserviamo ancora come le φ_r, essendo determinate quando sono date le λ_r, se è data anche la rappresentazione sferica delle tangenti alle linee λ_r, per quanto è stato detto, risultano determinate anche le Q_r e le P_r e però è determinata la superficie corrispondente, dacchè se ne conoscono le equazioni intrinseche (i).

165. Premesso ciò, passiamo alla esposizione del metodo di Weingarten.

Si assuma una funzione $\underline{z}$, le cui derivate siano proporzionali alle φ_r, ponendo

$$z_r = \sqrt{\sigma}\,\varphi_r, \qquad 9)$$

talchè, riferendosi sempre alla forma χ come fondamentale risulterà

$$\sigma = (\Delta_1 z)^2. \qquad 10)$$

Si riconosce facilmente che σ deve soddisfare alla equazione

$$\sum_r \sigma^{(r)} Q_r + 2\sigma\, G = 0,$$

ovvero alla

$$\sum_r \sigma^{(r)} \bar{z}_r + 2\sigma^{\frac{3}{2}} G = 0.$$

Escluderemo il caso delle superficie sviluppabili, e da questa si potrà dedurre che $\underline{\sigma}$ e $\underline{z}$ sono fra di loro indipendenti. Potremo quindi assumere

$$z = x_1, \sigma = x_2$$

e per le (5) e (9) la χ assumerà la espressione

$$\chi_0 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q_1\right)^2 dz^2 + Q_1 Q_2\, d\sigma\, dz + Q_2^2\, d\sigma^2.$$

Se ora deriviamo le (9) per un sistema qualunque di variabili troviamo le

$$z_{rs} = \sqrt{\sigma}\, Q_r P_s + \frac{\sigma_s}{2\sqrt{\sigma}} \varphi_r$$

e quindi in particolare per le variabili z e σ

$$z_{11} = \sqrt{\sigma}\, Q_1 P_1, \quad z_{12} = z_{21} = \sqrt{\sigma}\, Q_2 P_1, \quad z_{22} = \sqrt{\sigma}\, Q_2 P_2$$

e di più

$$Q_2 P_1 - Q_1 P_2 = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^{\frac{3}{2}}.$$

Valendoci di queste formule calcoliamo ora per la forma χ_0 gli invarianti

$$\Delta_2 z = \sum_{rs} e^{(rs)} z_{rs}$$

$$\mathfrak{J}(z) = \sum_{rs} z_{rs} \overset{(r)}{\bar{z}} \overset{(s)}{\bar{z}}$$

$$\vartheta(z) = \Delta_{22} z$$

e troveremo

$$\left.\begin{aligned} 6\Delta_2 z - \mathfrak{J}(z) &= -\frac{1}{2}\,6\,\frac{Q_1}{Q_2} \\ \vartheta(z) &= -\frac{1}{2}\sqrt{6}\,\frac{P_1}{Q_2} \\ \mathfrak{J}(z) &= 6^{\frac{3}{2}}\,\frac{P_2}{Q_2} \end{aligned}\right\} \quad 10)$$

Si osservi che, ricordando le formole che esprimono le $\overset{(r)}{\bar{\lambda}}$ e le $\lambda^{(r)}$ rispettivamente per le λ_r e le $\bar{\lambda}_r$, la (I) può essere ridotta alla forma

$$\lambda_2 Q_1 - \lambda_1 Q_2 = \bar{\lambda}_1 P_2 - \bar{\lambda}_2 P_1 ; \quad 11)$$

e per le (10) si concluderà che essa equivale alla

$$6\left\{\lambda_1 + 2\lambda_2 \Delta_2 z\right\} + \frac{\bar{\lambda}_1 - 2\sqrt{6}\,\lambda_2}{\sqrt{6}}\,\mathfrak{J}(z) + 2\bar{\lambda}_2\sqrt{6}\,\vartheta(z) = 0 ; \quad W)$$

nella quale deve porsi

$$\sqrt{6} = \Delta_1 z .$$

mentre λ_1 e λ_2 rappresentano gli elementi del sistema coordinato covariante della congruenza considerata espressi per 6 e z

Si supponga ora di conoscere una superficie S_0 di elemento lineare $\sqrt{\varphi_0}$, considerando sopra di essa una congruenza qualunque λ_r, siano $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$

i coseni di direzione delle sue linee. — Si introducano al posto di x_1 ed x_2 una variabile qualunque z, che soddisfi alla equazione (I), (la quale si determinerà quindi con una semplice quadratura), e $\sigma = (\Delta_1 z)^2$; e le λ e le ξ si considerino come funzioni di queste variabili.

Dalle (i) ricaviamo le identità

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dz} &= \frac{\eta}{\sigma} + \mathfrak{J} Q_1\,, \quad \frac{d\xi}{d\sigma} = \mathfrak{J} Q_2 \\ \frac{d\eta}{dz} &= -\frac{\xi}{\sigma} + \mathfrak{J} P_1\,, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \mathfrak{J} P_2\,, \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

essendo

$$\eta = \frac{\nabla(\xi z)}{\Delta_1 z}$$

Ricordando poi (§. 41) le

$$\lambda_{rs} = \bar{\lambda}_r \varphi_s\,, \quad \bar{\lambda}_{rs} = -\lambda_r \varphi_s\,,$$

dalle quali si traggono le

$$\frac{d\lambda_r}{dx_s} - \frac{d\lambda_s}{dx_r} = \bar{\lambda}_r \varphi_s - \bar{\lambda}_s \varphi_r$$

$$\frac{d\bar{\lambda}_r}{dx_s} - \frac{d\bar{\lambda}_s}{dx_r} = \lambda_s \varphi_r - \lambda_r \varphi_s$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d\sigma} - \frac{d\lambda_2}{dz} &= -\frac{1}{\sigma}\,\bar{\lambda}_2 \\ \frac{d\bar{\lambda}_1}{d\sigma} - \frac{d\bar{\lambda}_2}{dz} &= \frac{1}{\sigma}\,\lambda_2. \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Si consideri ora una qualunque altra superficie S, avente $\sqrt{\varphi}$ come espressione del suo elemento lineare; e la corrispondente rappresentazione sferica delle tangenti alle linee λ_r tracciate sopra di essa. Per questa, scelte opportu-

namente le variabili z e σ, la espressione di x assumerà ancora la forma x_o, e poichè le equazioni (W_o) e (W) sono indipendenti dalla scelta delle variabili è chiaro che $\underline{z}$ dovrà soddisfare alla equazione (W) e di più essere tale che $\Delta_1 z$ risulti indipendente da z; e che si dovrà poi assumere $\sigma = (\Delta_1 z)^2$. Reciprocamente supponiamo di avere scelte $\underline{z}$ e $\underline{\sigma}$ nel modo indicato, e consideriamo le espressioni differenziali

$$dy = (\zeta \lambda_1 + \eta \bar{\lambda}_1)\, dz + (\zeta \lambda_2 + \eta \bar{\lambda}_2)\, d\sigma,$$

in cui per ζ ed η si intendano poste successivamente ζ_1, η_1; ζ_2, η_2; ζ_3, η_3. Avendo presente che la equazione (11) è soddisfatta, perchè, come abbiamo visto, essa equivale alla (W), e tenendo conto delle identità (12) e (13) è facile riconoscere che quelle espressioni sono i differenziali esatti di tre funzioni y_1, y_2, y_3; e di più ricordando le identità

$$a_{rs} = \lambda_r \lambda_s + \bar{\lambda}_r \bar{\lambda}_s\,,$$

che queste funzioni sono tali che si ha

$$\sum_1^3{}_h\, dy_h^2 \equiv \varphi\,.$$

Si può dunque concludere che ad ogni funzione $\underline{z}$, la quale soddisfi alla equazione (W) e sia tale che $\Delta_1 z$ risulti indipendente da $\underline{z}$ corri-

sponde una superficie S avente $\sqrt{\varphi}$ come espressione del suo elemento lineare, mentre è poi chiaro che questa superficie è unica e determinata, poichè è determinata la corrispondente rappresentazione sferica delle linee λ_r.

Il Weingarten chiama fondamentale la equazione (W). Si può quindi asserire che

„ Data una superficie S_0 e scelta sopra „ di questa ad arbitrio una congruenza di li„ nee λ_r, per ottenere tutte le superficie S applica„ bili sopra di essa basta determinare tutti gl „ integrali z della equazione fondamentale, pei „ quali $\Delta_1 z$ risulta indipendente da z. - Se $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$ „ sono i coseni di direzione delle linee λ_r sulla „ superficie S_0 espressi per le variabili z e σ re„ lative a queste superficie e si pone

$$\eta_h = \frac{\nabla(\zeta_h z)}{\Delta_1 z},$$

„ per ogni integrale z della equazione fonda„ mentale tale che $\Delta_1 z$ sia indipendente da z „ esiste una ed una sola corrispondente super„ ficie S, le cui coordinate cartesiane ortogona„ li si hanno con semplici quadrature dal„ le equazioni

$$dy_h = (\zeta_h \lambda_1 + \eta_h \bar{\lambda}_1)\, dz + (\zeta_h \lambda_2 + \eta_h \bar{\lambda}_2)\, d\sigma.$$

Questo teorema contiene appunto tutto il metodo di Weingarten. — Il Weingarten dimostra di più nella sua Memoria come la sua equazione fondamentale meglio della (A) del § 163 si presti in molti casi alla integrazione con metodi noti.

Correzioni ed aggiunte

Pag. 3 La equazione, che si trova nella linea 4ª si segni (I)

„ 9 Alla linea 8ª (salendo) si legga u_{n-2} invece di u_{n-1}

„ 10 Alla linea ultima si legga X_{ri} invece di X_{rs}

„ 15 Alla linea 3ª (salendo) si legga $\frac{du}{du_r}$ invece di $\frac{du}{du_h}$

„ 16 Alla linea 6ª si legga Y_{hi} invece di Y_{ri} e u_h invece di u_r

„ 17 Nell'ultima linea si legga $Y_{ti} \frac{dY_{sj}}{du_t}$ invece di $Y_{ti} \frac{dY_{si}}{du_t}$

„ 19 Alla linea 13ª si legga $\frac{du}{dx_i}$ invece di $\frac{du}{dx}$

„ „ Alla linea 4ª (salendo) si legga noi invece di non

„ 28 Nella linea 6ª (salendo) dopo u_n si aggiunga in guisa che le equazioni (10) risultano soddisfatte; e nella successiva quelle invece di queste.

„ 33 Invece di supporle risolute si legga supporre queste risolute.

„ 54 Nella linea 10ª (salendo) si legga $X_{p+1|r_{p+1}} X_{p+2|r_{p+2}} \ldots\ldots X_{m|r_m}$ invece di $X_{1|r_{m+1}} X_{2|r_{m+2}} \ldots\ldots X_{m|r_m}$

„ 58 Nella linea 5ª (salendo) si metta il segno di eguaglianza dopo $X_{h|r_h r_{m+1}}$

„ 65 Nella linea 3ª invece di $a_{r r_{m-1}, r_{m+1} r_{m+2}}$ si legga $a_{r r_m, r_{m+1} r_{m+2}}$

„ „ Nella linea 12 in luogo di (1) si legga (5)

„ 66 Nella formola (B) invece di $\sum_{1q}^{m}$ si legga $\sum_{1h}^{m}$

Pag. 68 Nella linea 3ª si legga teorema invece di sistema.

" 71 Nella linea 10ª invece di $\sum_{1}^{n}{}_{rs}\sum_{1}^{n}{}_{h}$ si legga $\sum_{1}^{n}{}_{rs}a_{rs}\sum_{1}^{n}{}_{h}$.

" 72 Nella linea 5ª (salendo) si legga $s=$ invece di $o=$

" 73 Nella linea 1ª invece di $\sum_{ps}$ si legga $\sum_{s}$

" 75 Invece del primo periodo si legga, la quale non sarà quindi identicamente nulla, poichè si suppone $a>o$.

" " Nella terz'ultima linea si legga t invece di s e nella seconda s invece di r.

" 78 Nella linea 4ª si legga $y_{k|r}$ invece di $y_{h|r}$

" 80 Nella linea 5ª invece di quadratiche si legga quadriche

" 81 Nella linea 12ª si legga (0) invece di (6) e nell'ultima (13) invece di (9).

" 92 Nella linea 9ª (salendo) dopo la lettera y si aggiungano le parole si trasformano.

" 93 Nella linea 7ª invece di teorema si legga problema

" 100 Nella linea 7ª invece di associati si legga assoluti

" 107 Nella linea 8ª (salendo) invece di $s+1$ si legga $(-1)^{s+1}$

" 108 Nella linea 9ª (salendo) invece di ortogonale si legga canonico ortagonale.

" 109 Nella prima linea invece di (γ_s) si legga (γ_0)

" 113 Nella linea 8ª (salendo) invece di sul si legga pel

" 114 Nella linea 6ª (salendo) si legga (14_1) invece di (13) e nella 4ª $\sum_r N^{(r)}\bar{\lambda}_r$ invece di $\sum_r N^{(r)}\lambda_r$.

Pag. 117 Nella linea 10ª (salendo) invece di rs si legga b_{rs}.

" 121 Nella prima linea invece di φ e φ si legga φ e ψ.

" 125 Nella linea 7ª (salendo) si legga (γ') invece di γ

" 129 Nella linea 7ª si legga $\vartheta \frac{d\eta}{dv}$ invece di $v \frac{d\eta}{dv}$; e nella 12ª $\vartheta \overline{G}_r$ invece di $\vartheta G_r A$.

" 130 Nella penultima linea invece di considerando si legga conoscendo.

" 131 Nella linea 4ª invece di v^2 si legga ϑ^2

" " Le deduzioni del § 49 possono essere abbreviate osservando che le condizione del § 47 importano che i parametri $\Delta_2 z$ e $\Delta_1 z$ siano funzioni della sola z, dal che e dalla (28) segue che si può determinare con una sola quadratura β in modo che le $w_r = \beta z_r$ risultano le derivate di una funzione W. Indicando poi con $\underline{\vartheta}$ ciò, che diventa β per la sostituzione di $\underline{G}$ a $\underline{z}$ e di v a W, basterà ancora integrare il sistema

$$v_r = \vartheta \overline{G}_r ;$$

il che importa una nuova quadratura

" 138 Alla linea 12ª si aggiunga e $\lambda = -b^2$.

" 140 Nella linea 5ª si scambino fra loro sen φ e cos φ.

" " Nella linea 16ª si legga ϑ invece di φ.

144 Nella linea 11ª invece delle parole dell'elemento lineare si legga degli elementi lineari; nella 14ª si

vece di $dx_1^2\, dx$, $dx\, dy$. Di più nelle formole in fine di pagina si legga dovunque ϑ invece di v.

Pag. 145 Nella linea 10ª al posto di $\frac{d}{d\lambda_2}$ si legga $\frac{dx}{d\lambda_2}$

" 146 Nella linea 5ª invece di b_2^2 si legga b^2.

" 147 Nella linea 3ª invece di $du =$ si legga $u =$

" 157 Nella linea 13ª in vece di $d6$ si legga $2d6$

" 158 Nella linea 8ª (salendo) invece di λ_r si legga $\overline{\lambda}_r$

" 160 Nella linea 16ª si legga μ_r invece di λ_r

" 162 Nella linea 8ª (salendo) si legga $\underset{1}{\Delta} X$ in vece di ΔX

" 171 Nella linea 8ª si legga dei fasci, che appartengono le in luogo di delle

" 174 Nella linea 8ª salendo si legga comuni alla forma fondamentale al sistema λ_r etc.

" 182 Nella formola (g_4) si legga $\operatorname{sen}\vartheta \sum_r \overset{(r)}{\overline{\mu}} \psi_r$ invece di $\operatorname{sen}\vartheta \sum_r \mu^{(r)} \psi_s$.

" 183 Nella formola (g_5'') si legga $\frac{dH}{dx_1}$ in vece di $\frac{d}{dx}$,

" 194 Nella linea 6ª invece di (γ) si legga γ.

" 208 Nella linea 9ª (salendo) si legga $-\overline{X}_{rs}$ in vece di $\overline{X}_{rs}$

" 213 Nella linea 1ª si legga dei due fasci si trae la $\underset{2}{\Delta}\vartheta = 0$, la quale etc.

" 227 La dimostrazione del teorema del §. 98 deve essere modificata come segue.

Se ci riferiamo ad una congruenza qualunque μ_r appartenente ad un fascio ψ_r ed in

dichiamo con ϑ l'angolo, che le sue linee fanno con quelle di una congruenza geodetica λ_r pure qualunque, la equazione delle geodetiche può mettersi (§ 73) sotto la forma

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \sum_r \lambda^{(r)} \psi_r \,.$$

Per le superficie sviluppabili essendo $G = 0$, le ψ_r sono (§. 42) le derivate di una funzione ψ rispetto alle x_r, la quale si otterrà con una quadratura, e la equazione precedente assumendo la forma

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\psi}{ds},$$

ammetterà l'integrale

$$\vartheta = \psi + c,$$

c essendo una costante arbitraria. Posto dunque (§ 70)

$$\lambda_r = \cos(\psi + c)\, \mu_r - \operatorname{sen}(\psi + c)\, \bar{\mu}_r \,,$$

il sistema λ_r rappresenterà una semplice infinità di congruenze geodetiche, e pel teorema del paragrafo precedente la integrazione della equazione delle geodetiche richiederà ancora soltanto una nuova quadratura.

Pag. 229 Nella linea 4ª (salendo) si legge (α°) invece di (α^{s}).

Pag. 231 Nella linea 12ª invece di § 22 si legga § 24.

" 236 La dimostrazione della seconda parte del teorema del § 101 può essere data più brevemente come segue.

Si supponga reciprocamente che sulle superficie di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ esista un fascio isotermo ψ_r, il quale compren-da una congruenza di linee parallele μ_r e quindi una congruenza geodetica $\bar{\mu}_r$. Dalla isotermia del fascio ψ_r segue (§ 88) che le $\bar{\psi}_r$ sono le derivate di una funzione ri-spetto alle x_r. Indicando questa funzione cambiata di segno con $\log \rho$ varranno dun-que le

$$\rho_r = -\rho\,\overline{\psi}_r\,,$$

dalle quali e dall'essere la congruenza $\bar{\mu}_r$ geo-detica scendono immediatamente le (9).

" 245 Nella linea 8ª invece di 12 si legga $x_1 x_2$.

" 246 Nella linea 1ª si legga 20) invece di 29)

" " Nella linea 10ª si legga N invece di N_h e si ag-giunga poi, essendo N una indeterminata

" 247 Nella linea 8ª (salendo) invece di basta si leg-ga è necessario e basta.

" 252 Nella formola (5) invece di du si legga dv_1^2; e nella linea 15ª invece di con, sono.

Pag. 259 Nella linea 1ª si legga $\bar{X}_{rs}$ invece di X_{rs}

„ 262 Nella formola (α) invece di $h(g)^2$ si legga $4(g)^2$.

„ 266 Nella linea 8ª salendo invece di $2P - 3gP$ si legga $(2P - 3g) . P$.

„ 272 Nella linea 7ª invece di ρ_h si legga $\mathfrak{S}_h$

„ 276 Nelle linee 1ª e 2ª si legga $\lambda^{(5)}$ e $\lambda^{([illegible])}$ rispettivamente invece di $\lambda^{(3)}$ e $\lambda^{(3)}$.

„ 283 Nelle linee 4ª e 5ª invece di normale principale si legga binormale.

Si osservi che, se le linee λ_r sono rette, le (14) diventano identità e quindi cadono in difetto le formole dedotte coll'aiuto delle (14) stesse.

„ 290 Nelle linee 4ª e 5ª invece di superbisce si legga subisce.

„ 293 Nella linea 2ª invece di $-\omega_1$ e ω_2 si legga $-\omega_1$ e $-\omega_2$.

„ 297 Nell'ultima linea invece di $z_1\ z_2\ z_3$ si legga $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$.

„ 300 Nei primi membri delle formole (C_1) si legga $N^{(p)}$ in luogo di $\rho^{(p)}$.

„ 305 Nella linea 7ª (salendo) si legga si dicono poi iperbolici, parabolici etc.

„ 308 Nella linea 10ª si legga (13) invece di (12)

„ 329 Nella linea 10ª al posto di ζ si ponga ξ.

„ 346 Nella penultima linea si legga $\frac{Q}{\Delta_1 N}$ inve-

ce di $\overset{G}{\Delta N}$

Pag. 356 Nella formola (8) invece di $\frac{dr_2}{ds} \cdot \frac{dr_1}{ds}$ si legga $\frac{dr_2}{ds} : \frac{dr_1}{ds}$.

" 357 Nella formola (12') si legga $\beta_1 r_2^2 - \beta_2 r_1^2$ invece di $\beta_1 r_2^2 - \beta_1 r_1^2$.

" 365 Nella linea 7ª si legga $r\,\alpha\,\mu$ invece di $r\,\alpha_1\,\mu$.

" 368 Nella linea 6ª (salendo) invece di $2H$ si legga $\frac{1}{2}H$.

" 375 Nelle linee 9ª e 11ª (salendo) si legga $\bar{k}_r$ in luogo di k_r.